

5.2. Gekoppelte Hopf-Normalformen

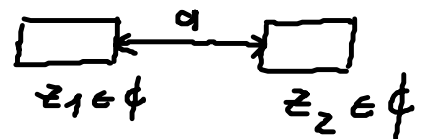
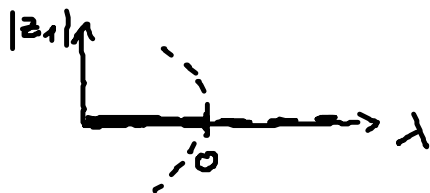
Lit.: B. Fiedler et al.
Phil. Trans. R. Soc. A 368
Page 319 (2010)

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i + (1 + i\mu)|z_1|^2)z_1 + \alpha(z_2 - z_1)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i + (1 + i\mu)|z_2|^2)z_2 + \alpha(z_1 - z_2)$$

o.B.d.A
 $\omega = 1$

Hopf-Normalform (ohne Kopplung)



mit Kopplung System beschrieben durch 4 dynam. Variablen

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } z_1 \\ \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_1 \\ \text{Im } z_2 \end{pmatrix}$$

Synchroner Zustand ($z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{sync}}(t)$)

=> Kopplung verschwindet 12 identischer Systeme

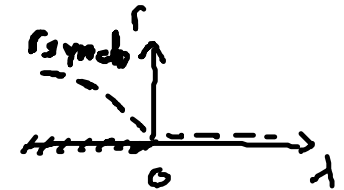
$$z_{\text{sync}} = r e^{i\varphi} \in \phi$$

$$\Rightarrow \dot{z}_{\text{sync}} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + i\mu)r^2)r^2 e^{i\varphi}$$

Realteil: $\dot{r} = (\lambda + r^2)r$ (siehe 1.3)

Imagin.: $\dot{\varphi} = 1 + \mu r^2$

- Amplitude des invarianten periodischen Orbits

$$\dot{r} = 0 \rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r_{\text{synch}} = \sqrt{-\lambda}$$


• Phase des invarianten period. Orbits

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{P} t \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P} = 1 + \gamma r_{\text{synch}}^2 = 1 - \lambda \gamma$$

↑ Periode

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{synch}} = \frac{2\pi}{1 - \lambda \gamma}}$$

• Lösung für synchr. Zustand

$$z_{\text{synch}} = \sqrt{-\lambda} \exp\left[\frac{2\pi i}{P_{\text{synch}}} \cdot t\right]$$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System?

Verwende neue Koordinaten: $z_+ = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)$ Mittelwert

$z_- = \frac{1}{2} (z_1 - z_2)$ Asynchronität

Hopf NF

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2} \left[f(z_1) + f(z_2) + a(z_2 - z_1) + a(z_1 - z_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-) \right)$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2} (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$$

$$= \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)] - \alpha z_-$$

$$z_1 = z_- - z_+$$

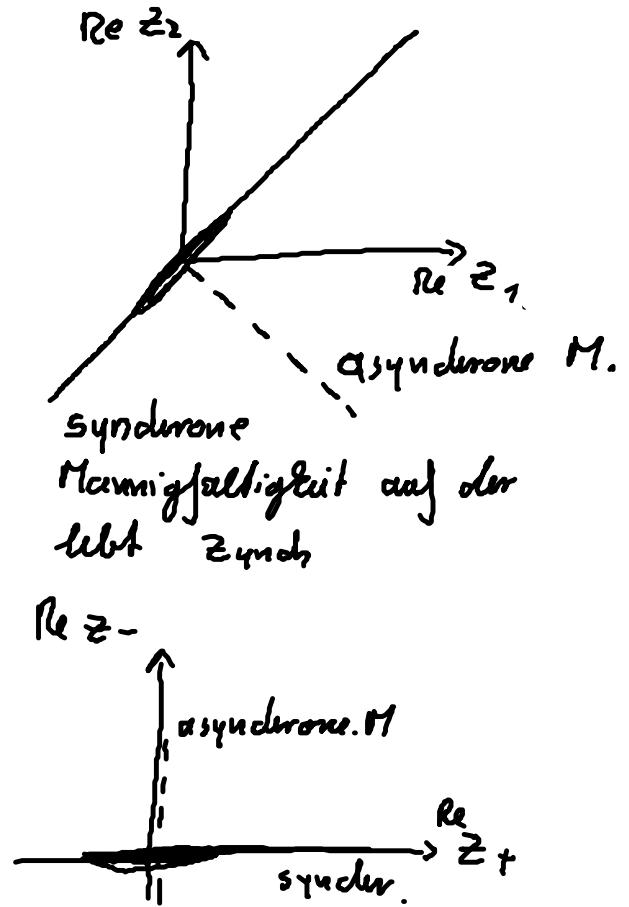
$$z_2 = z_- + z_+$$

- Menge gleichphasiger Lösungen (syndr. Lösungen)

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$

Kennen wir!

$$z_+ = z_{\text{syndr.}}$$



- Menge der gegenphasigen Lösungen:

$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \} \quad \text{d.h. } z_1 = -z_2$$

$$\Rightarrow \dot{z}_+ = \frac{1}{2} (f(0 + z_-) + f(0 - z_-)) = \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) = 0$$

↑
f kubische Fkt. von z

⇒ Lösung für z_-

$$\begin{aligned} \dot{z}_- &= \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) - \alpha z_- = f(z_-) - \alpha z_- \\ &= \underbrace{(\lambda + i + (1 + i\mu)|z_-|^2)} z_- - \alpha z_- \end{aligned}$$

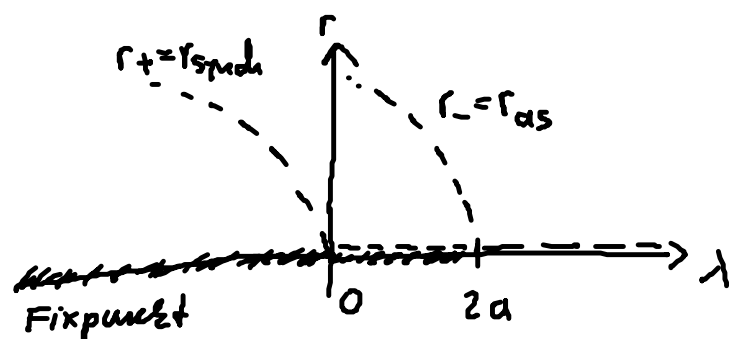
$f(z_-)$

$$z_{as} = z_- = r_- \exp \left[\frac{2\pi i}{p_-} t \right]$$

mit $r_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)}$

$$p_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a) \gamma}$$

Fazit: Gegenphasiger Orbit verschwindet in einer Hopf-Bifurkation bei $\lambda = 2a$

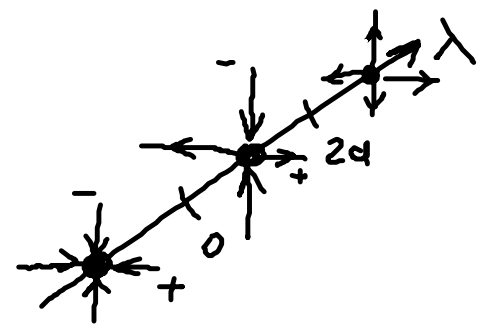


Fixpunkt
stabil
(0) instab.
Richtungen

(2)

(4) instabile Richtungen

des Fixpunktes $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Wunsch: Stabilisierung der periodischen Lösungen

Möglich durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

(i) r_{spnd} wurde in 3.2.2. durch Wahl $\tau = p_+$ stabilisiert

(ii) r_{as} stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkopplungskontr.
 mit halber Periode $\tau = \frac{P_-}{2}$

Begründung:
$$z_-(t - \frac{P_-}{2}) = r_- \exp\left(\frac{2\pi i (t - \frac{P_-}{2})}{P_-}\right)$$

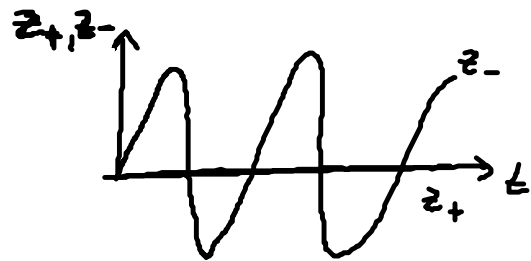
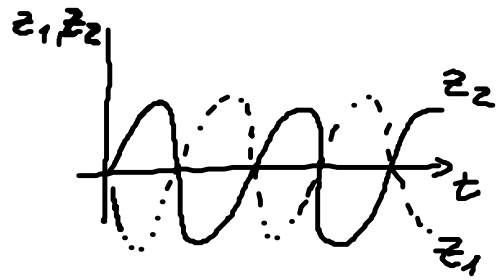
$$= r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right) \underbrace{\exp(-\pi i)}_{-1}$$

$$= -z_-(t)$$

$$\Rightarrow \underline{z_1(t)} = \underbrace{z_+ + z_-}_0 = z_-(t) = -z_-(t - \frac{P_-}{2})$$

$$= \underline{z_2(t - \frac{P_-}{2})}$$

analog: $z_2(t) = z_1(t - \frac{P_-}{2})$



Systemgleichung mit nicht invasiver Kontrolle:

↙ Rückkopplungsstärke

$$(I) \dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + \underbrace{b(z_2(t - \tau) - z_1(t))}_F$$

F verschwindet auf asymptot. Lösung

$$(II) \dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t - \tau) - z_2(t))$$

Frage: Welche b stabilisiert z_{as} ?

NB: Diese Kontrolle ist invasiv für den gleichphasigen Orbit z_+ .

in z_+ und z_- Koordinaten lauten die Gleichungen (I, II)

$$(I) \dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-) \right) + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$(II) \dot{z}_- = \frac{1}{2} \left(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-) \right) - 2\alpha z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von $z_- = r_- e^{i\varphi}$:

Untersuche Stabilität des Fixpunktes im Ursprung!

\Rightarrow Linearisieren von (I', II') um $z_+ = z_- = 0$ ($z_+ = 0 = z_-$)

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left[(\lambda + i)(z_+ + \cancel{z_-}) + (\lambda + i)(z_+ - \cancel{z_-}) \right] + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$= (\lambda + i) z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2\alpha + i) z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

• Bem: Linearisierung entkoppelt z_+ und z_-

Weiter: Ansatz $z_{\pm} \sim e^{\lambda t}$ (λ Eigenwert) und Untersuchung

der Stabilität des Fixpunktes bei $\lambda = 2\alpha$ mit $z_- = \underline{p_-}$

$$\Rightarrow z = \frac{p_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2\alpha)\mu)} = \pi$$

↑
λ = 2α

charakteristische Gleichungen

$$z_+ : 0 = \lambda + i + b(e^{-\eta z} - 1) - \eta$$

$$= 2\alpha + i + b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta$$

$$\textcircled{*}_+ \left(\begin{array}{l} b=0 \\ \Rightarrow \eta = \lambda + i \\ \Rightarrow \text{instabil in} \\ \text{+ Richtung} \end{array} \right.$$

$$z_- : 0 = 2\alpha - 2\alpha + i - b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta \quad \textcircled{*}_-$$

$$\left. \begin{array}{l} b=0 \\ \Rightarrow \eta = i \end{array} \right\}$$

Suche Hopf-Kurven in $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ Ebene, die $\text{Re } \eta = 0$ erfüllen, d.h. Grenzen, an denen sich die instabile Dimension des Fixpunktes ändert:

Parametrisierung der Hopf-Kurven $b = b(\omega)$

$$\eta = 0 + i(1 + 2\omega)$$

↓

Einsetzen in $\textcircled{*}_+$ und

Umformen nach b liefert $b_+(\omega)$ Kurve

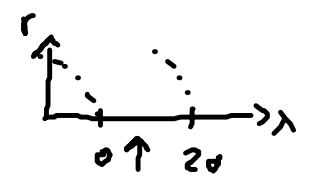
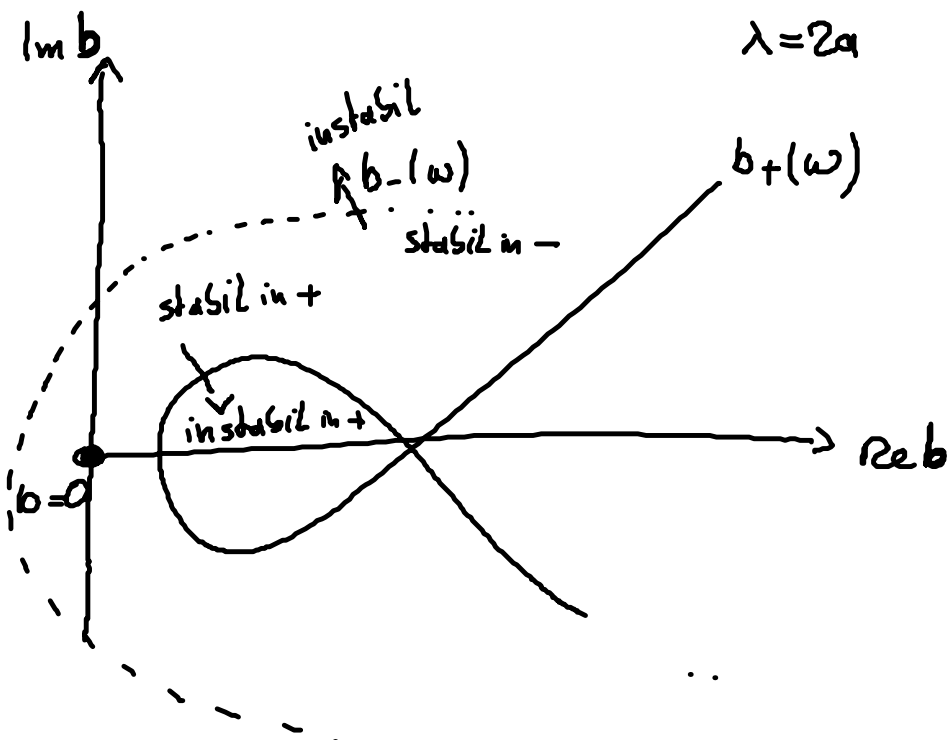
einsetzen in $\textcircled{*}_-$

liefert $b_-(\omega)$

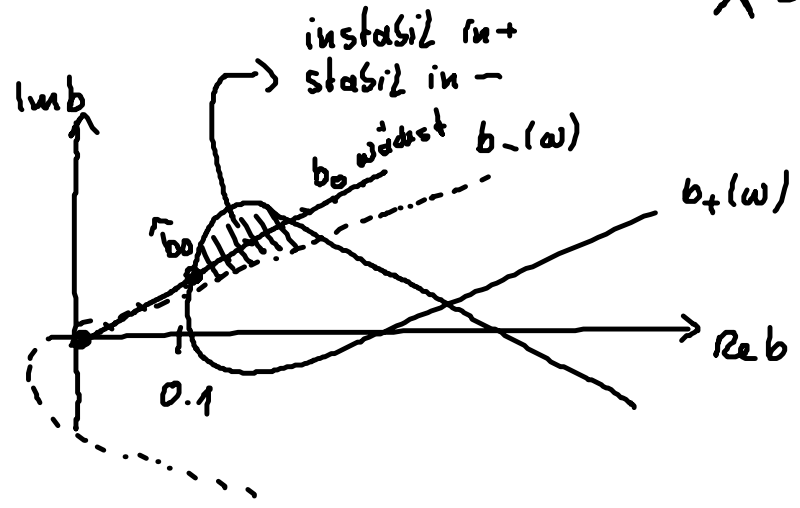
$$b_+(\omega) = 2 \frac{\alpha - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i\omega)}$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i\omega)}$$

- Richtung:
 $b=0: \eta = i + \lambda - 2a$



$\lambda = 2a - 0.01$



im straffierten Bereich
 ist Stabilit\u00e4t des Fixpt.
 umgekehrt
 -> r kann stabilisiert
 werden

Bifurkationsdiagramm in Abh\u00e4ngigkeit von $b = b_0 e^{-i \frac{\pi}{8}}$

