- Ankündigung Vortrag:

  Prof. Dr. Stefan Bornholdt

  „Börse, Chaos und Lawinen: Die Physik systemischer Risiken in Finanzmärkten"

  Fr. 13.1 um 19 Uhr
  HU-Berlin, Hörsaal 2014 A
  Unter den Linden 6,

- DPG Tagung
  studentische Hilfskräfte gesucht www.tu-berlin.de/?dpg12

Zusammenfassung 5.2.

- 2 gekoppelte Hopf-Normalformen
  - gegenphasige Lösungen – Pyragas Kontrolle mit dualer Periode stabilisiert gegenphas. Orbit für bestimmte Rückkopplungsstärken
    - nur für komplexe Rückkopplungsstärken b
  - Mit $b \neq 0$ entstehen neue Delay induzierte gegenphasige Orbits zusätzlich zum Orbit r_{as}

    Bem: ECM Lösungen beim Laser + Feedback sind auch Delay induzierte Orbits in Re E / Im E Ebene

---

5.3. Netzwerke

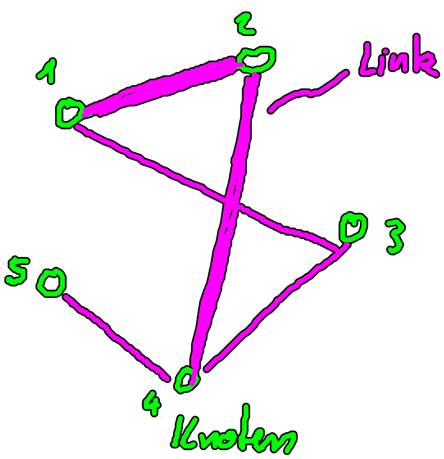
- ausgehend von 2 gekoppelten Elementen in 5.2. jetzt Betrachtung von vielen gekoppelten Elementen

Kopplung : Link (Verbindung) im Netzwerk

Elemente : Node (Knoten) im Netzwerk
z.B. Laser, Neuronen

- Zur Beschreibung eines Netzwerkes sind wichtig
  1) Welche Knoten sind gekoppelt
  → Topologie
  2) Wie sind die Knoten gekoppelt
  → Kopplungsschema

5.3.1. Topologie des Netzwerkes



N×N Matrix

N : Zahl der Elemente im Netz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

adjacency matrix

$\underline{\underline{A}}$: Nachbarschaftsmatrix

- Mathematisch ist die Topologie beschreibbar durch Matrix $\underline{A}$

$\underline{\underline{A}}_{jn} = a_{jn} = 1$ → Kopplung existiert zwischen j und n

$a_{jn} = 0 \quad \rightarrow$ keine Kopplung

- Erweiterung von $\underline{A}$ durch
  - gerichtete Verbindungen $\rightarrow$ A nicht mehr symm.
  - gewichtete Verbindungen $\rightarrow$ a_{ij} nicht nur Werte von 0 oder 1 sondern reelle Werte

- für gewichtete Netzwerke spricht man statt von $\underline{A}$ von $\boxed{\text{Kopplungsmatrix } \underline{G}}$

g_{ij} : Stärke der Kopplung

- Charakterisierung der Topologie durch bestimmte Kenngrößen

z.B. Knotenordnung (Zahl angekoppelter Elemente) $\quad k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$

Verteilung von k : $P(k)$ Wahrscheinlichkeit einen Knoten mit Ordnung k zu finden

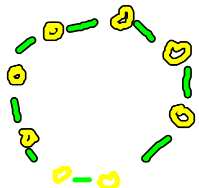
mittl. Knotenordnung $\quad \langle k \rangle = \sum_i P(k_i) k_i$

- es existieren viele weitere mögliche Größen um Netzwerk Topologie zu unterscheiden
  - mittl. Pfadlänge, Clustercoeffizient, Einbettung

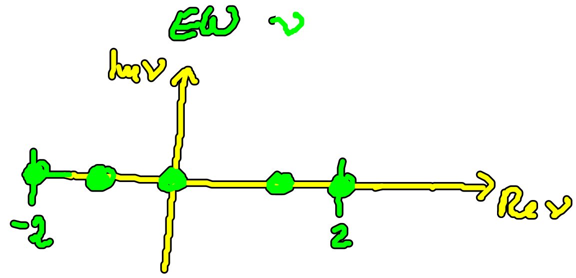
• Eigenwertspektrum von $\underline{\underline{A}}$ oder $\underline{\underline{G}}$ auch gut um Topologie zu beschreiben (enthält vollständige Information)

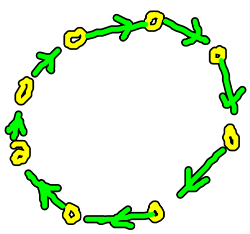
z.B.

Netz, $N=8$

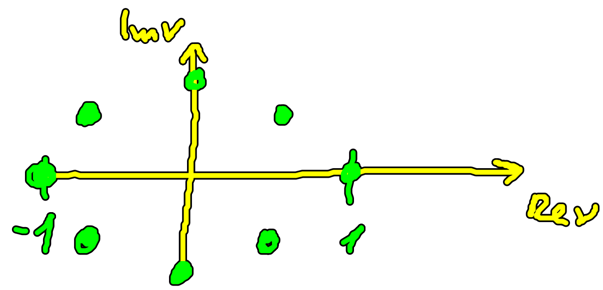


bidirektionaler Ring



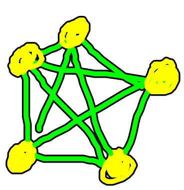


unidirektionaler Ring

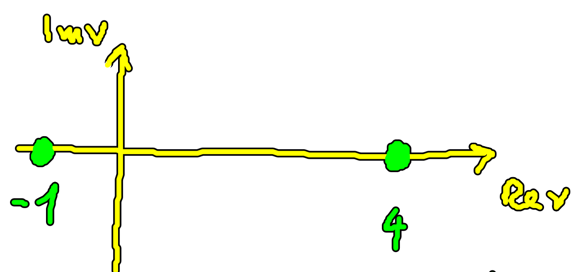


$$\nu_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

Eigenwerte liegen auf Kreis in kompl. Ebene



vollständiges Netz
(jeder mit jedem)



$\hat{=}$ Zeilensumme von $\underline{\underline{A}}$

5.3.2. Kopplungsschema

– Kopplungsschema $\underline{\underline{H}}_{ij}$ gibt an wie die Elemente i und j koppeln, d.h. wie die gekoppelten Gleichungen aussehen

Möglichkeiten

Laser
- opt. Kopplung — Lichtvariable (i) in Lichtv. (j)
- elektro-opt. Kopplung — Lichtv. (i) in Ladungsträgerv. (j)

- Lang Kobayashi (selbst Kopplung) : dyn. Variablen $\underline{x} = \begin{pmatrix} E \\ n \end{pmatrix}$

$$H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Feld koppelt nur an Feld Variable

- 2 Hopf Normalformen aus S. ?.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z \\ \mathrm{Im}\, z \end{pmatrix}$$

$$H_{12} = \begin{array}{cc|c} \mathrm{Re}\, z_1 & \mathrm{Im}\, z_1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}\, z_2 \end{array} \end{array}$$

=> Differenzialgleichungssystem aller Element hat die Form

$x_i \in \mathbb{R}^m$; m Dimension des Phasenraumes

$\underline{x}_i$: Dynamik im Phasenraum des i-ten Elementes

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i(\underline{x}_i(t)) + \sigma \sum_j^N \underbrace{G_{ij}}_{\text{Topologie}} \underbrace{\underline{\underline{H}}_{ij} \underline{x}_j}_{\text{Kopplungsschema}}$$

lokale Dynamik z.B. Hopf Normalform

σ : Kopplungsstärke

- direkte Kopplung (pseudo diffusive)

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i[x_i] + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, \underline{\underline{H}}_{ij}\, x_j(t-\tau_{ij})$$

Bsp.: Laser mit Feedback
($N=1$, $G_{11}=1$, $\tau_{11}=\tau_{ex}$)
$\sigma=k$

- diffusive Kopplung

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i[x_i] + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, \underline{\underline{H}}_{ij} \left[\underline{x}_j(t-\tau_{ij}) - \underline{x}_i(t) \right]$$

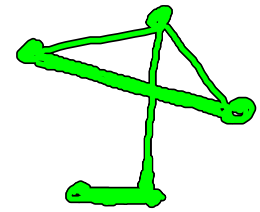
Bsp. Neuronenkopplung
Input ist Potenzialdiff.

Bemerkung: beides ineinander umzuformen
durch $\tilde{F}_i = F_i - \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij}\, \underline{H}_{ij}\, x_i$ (geänderte lokale Dynamik)

5.3.3. Vorraussetzung für Synchronisierung aller Elemente

- $\underline{F}_i = \underline{F}$ alle gleiche lokale Dynamik
- $\tau_{ij} = \tau$ " " Signallaufzeiten
- $\sum_{j=1}^{N} G_{ij} = \text{const}\ \forall i$ alle Elemente bekommen im Fall der Synchronisierung das gleiche Eingangssignal

Konstante Zeilensumme



- erreicht man durch Wichtung der Links

• $\underline{\underline{H}}_{ij} = \underline{\underline{H}}$ identische Kopplungsschema

$\underline{\underline{H}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

=> Dynamik auf der isochronen Synchronisierungs Mannigfaltigkeit gegeben durch

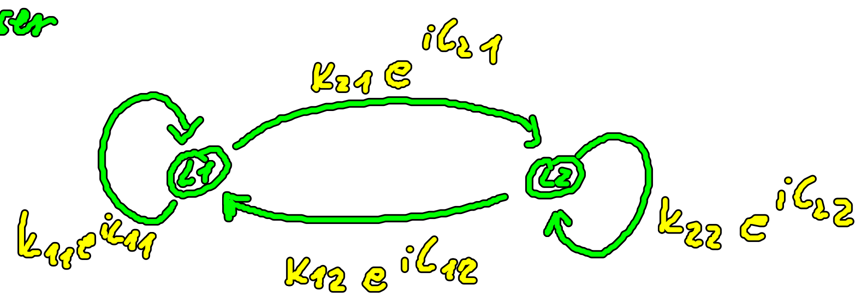
$$\dot{\underline{x}}_s = F(x_s(t)) + \sigma \underline{\underline{H}}\, \underline{x}_s(t - \tau)$$

entspricht einzelner Dynamik eines Elements
Vergleiche 5.2. gleichphasige Lösung.

Noch zu klären: Ist die Dynamik in synchr. Mannigfaltigkeit stabil?
→ 5.3.4.

<u>Frage</u>: Was bedeutet Bedingung konstanter Zeilensumme für das Netzwerk.

Bsp.: 2 gekoppelte Laser



$$\dot{E}_1 = (1+i\alpha)\,n\,E_1 + k_{11} e^{iC_{11}} E_1(t-\tau) + k_{12} e^{iC_{12}} E_2(t-\tau)$$

$$\dot{E}_2 = (1+i\alpha)\,n\,E_2 + k_{22} e^{iC_{22}} E_2(t-\tau) + k_{21} e^{iC_{21}} E_1(t-\tau)$$

$$T\dot{n}_1 = P_N - n_1 - (1+2n)\,|E_1|^2$$

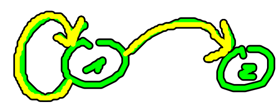
$$T\dot{n}_2 = P_N - n_2 - (1+2n)\,|E_2|^2$$

Kopplungsmatrix: $\underline{\underline{G}} = \begin{pmatrix} k_{11} e^{iC_{11}} & k_{12} e^{i(C_{12}-u)} \\ k_{21} e^{i(C_{21}+u)} & k_{22} e^{iC_{22}} \end{pmatrix}$

neue Variable
$\tilde{E}_2 = e^{iu} E_2$

u: künstliche Variable um Phasenverschiebung besser beschreiben zu können

- konstante Zeilensumme: (Fall $k_{22} = k_{12} = 0$)



$$k_{11} e^{iC_{11}} = k_{21} e^{i(C_{21}+u)}$$

$\Rightarrow$ Synchronisierung nur möglich wenn
$k_{11} = k_{21}$

- je nach Phasen C_{11}, C_{21} stellt sich Synchronisierung mit Phasenshift $u = C_{11} - C_{21}$ ein also $E_1 = e^{iu} E_2$