

### 5.3.4. Netzwerke aus Hopf - Normalformen

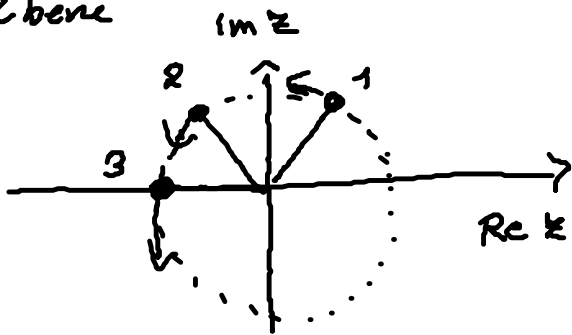
ausgehend von 5.2 betrachten wir nun  $N$  gekoppelte Hopf - Normalformen

$$\dot{z}_j = (\underbrace{1+i}_{\omega=1 \text{ superkrit.}} + \underbrace{(-1+i)}_{\omega=1 \text{ superkrit.}}) |z_j|^2 z_j + \epsilon \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t)) \quad (I)$$

Kopplungsstärke  $\epsilon = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$   
 Kopplungsmatrix  $\underline{G}$   
 Oszillatoren  $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$   
↑ radius  
↑ Phase

#### Invariante Zustände

Veranschaulichung der Dynamik der einzelnen Oszillatoren in komplexer Ebene



Wir suchen invariante Zustände für die gilt

$$\dot{r}_j = 0 \quad \oplus$$

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_m$$

Bem.  $\oplus \stackrel{!}{=} \text{ECM Ansatz in 4.2.2}$   
 wegen  $S^1$ -Symmetrie der Gleichungen

Annahme: gleiche Amplitude,  $\Rightarrow$   
 aller Oszillatoren, konstanter  
 Phasenunterschied

$$\boxed{\begin{aligned} r_j &= r_{s,m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \end{aligned}}$$

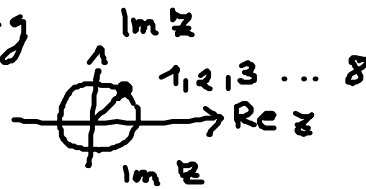
(II)  
 $m \in \mathbb{N}$

Index  $m$ : klassifiziert mögliche invariante Zustände

$m = 0$  Synchron in-phases Lösung

$$r_j = r_{s,0}$$

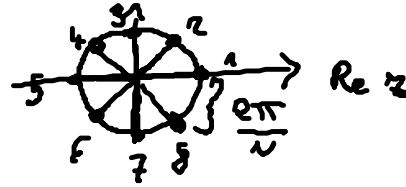
$$p_j = \Omega_0 t$$



$m = 1$  Splay state

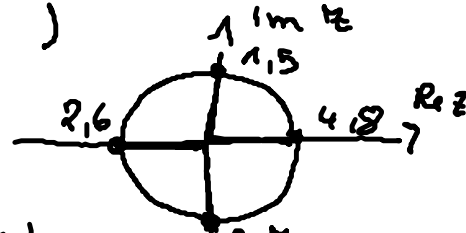
$$r_j = r_{s,1}$$

$$p_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$



• jeder Oszillator hat andere Phase aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (sich drehendes Speicherrad)

$m > 1$  Cluster Zustand (inphase innerhalb der Cluster konstanten Phasenunterschied zw. Clustern)



Bemerkung: für  $N=2$  entspricht der Splay Zustand der gegenphasigen Lösung (siehe 5.2)  $z_1 + z_2 = 0$

$m > 1$  Zahl vorhandener Cluster  $M$  gegeben durch die kleinste gemeinsame Vielfache von  $m$  und  $N$  geteilt durch  $m$

$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m} \quad (\text{Least common multiplier}) \quad N=8 \quad m=2 \Rightarrow 4 \text{ Cluster}$$

• Bestimmen der invarianten Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I)

In Amplitude und Phase lauten die Bestimmungsgleichungen

$$r_{s,m}^2 = - \left[ \lambda - \sum_n G_{jn} K \sin \beta + K \sum_{n=1}^N G_{jn} \cos(\Omega) \right]$$

$$\Omega_m = 1 + \gamma r_{s,m}^2 - \left[ \sum_n G_{jn} K \sin \beta + K \sum_n G_{jn} \sin(\Omega) \right]$$

Wieder Annahme

konstante Zelensumme

$$\sum_n G_{jn} = \text{const} = 1$$

damit im synchronen Zustand alle Elemente gleichen Eingang bekommen

Lösung für synchronen Zustand

$m = 0$

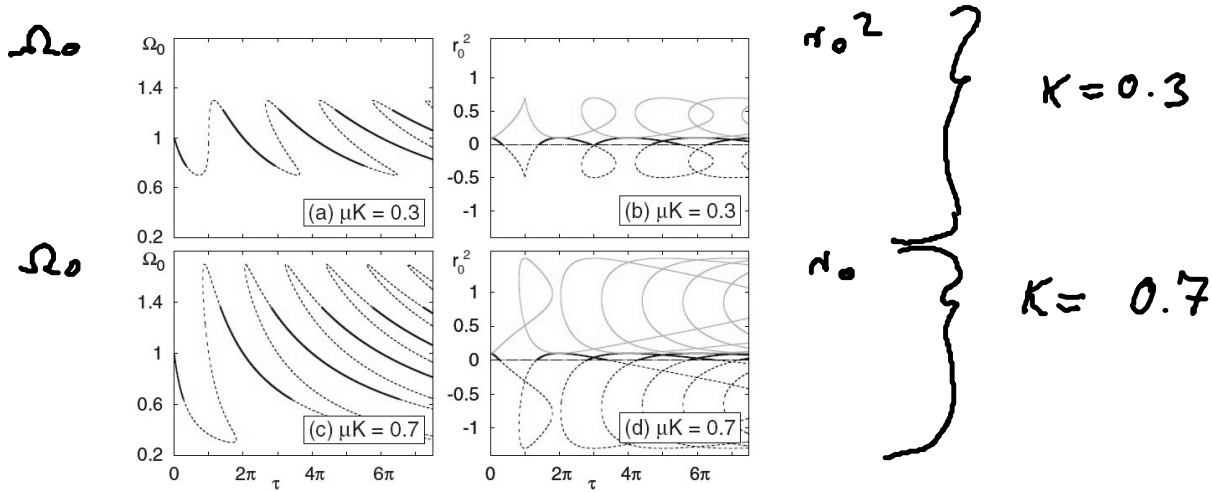


FIG. 1. (Color online) Collective frequency  $\Omega_0$  (left) and squared amplitude  $r_0^2$  (right) of in-phase oscillation ( $m=0$ ) vs time delay  $\tau$  for different amplitude of the feedback strength [ $\mu K=0.3$  and  $0.7$  in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase  $\beta=0$  and  $\beta=\Omega_0\tau$ , respectively. Unphysical solutions ( $r_0^2 < 0$ ) are dashed. For  $\beta=\Omega_0\tau$  the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters:  $\lambda=0.1$ ,  $\omega=1$ , and  $\gamma=0$ .

• Frage: Ist die gefundene Lösung stabil? Wenn ja hängt sie ab von der Topologie  $G_{ij}$  des Netzwerkes?

Strategie zur Analyse der Stabilität des synchronen Zustandes

1. Möglichkeit: • Betrachten Anwachsen einer Störung von der synchronen Dynamik für das gesamte Netzwerk  
• Stabilität, wenn Störung abklingt

Problem: • Für große Netzwerke sehr aufwendig, da eine  $2 \cdot N$  dim. DDE (delay differential equation) simuliert werden muss  
• Für jede Topologie neue Berechnung nötig

2. Möglichkeit: Master stability function (MSF)

## 5.4 Master Stability Function

Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchronen Lösung

Netzwerk / gekoppeltes System

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{f}(\underline{x}_i) + \epsilon \sum G_{ij} \underline{H} \underline{x}_j$$

Topologie des Netzwerkes

Eigenwerte der Kopplungsmatrix  $\underline{G} : \nu_k$

lokale Dynamik

Betrachten  $\delta \underline{x}$  vom synchronen

Zustand  $\underline{x}_s$ :  $\delta \underline{x}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_s$

und untersuchen Lyapunov-Exp.  $\Lambda$  der Lösungen von

$$\otimes \dot{\delta \underline{x}} = D \underline{f} \Big|_{\underline{x}_s} \delta \underline{x} + \nu \underline{H} \delta \underline{x}$$

als Funktion von  $\nu$  also  $\Lambda(\nu)$

Dim: 2  
(dim. des Knoten)  
anstatt  $2N$

Stabilität der synchronen Lösung gegeben, wenn größter Lyapunov Exponent bei  $\nu_k$  kleiner als Null für alle  $k$

$$\Lambda(\nu) = MSF$$

Synchrone Lösung stabil wenn:

$$\Lambda(\nu_k) < 0 \quad \forall k \quad (\text{außer } \nu_k = 1)$$

aus Topologie (auf  $\nu_k$ )  
aus  $\otimes$

Literatur

L. M. Pecora, T. L. Carroll  
PRL 80, 2109 (1998)

Vorteile

• wenn  $\Lambda(\nu)$  einmal bekannt aus  $\otimes$  kann leicht der Einfluss der Netzwerk Topologie betrachtet werden

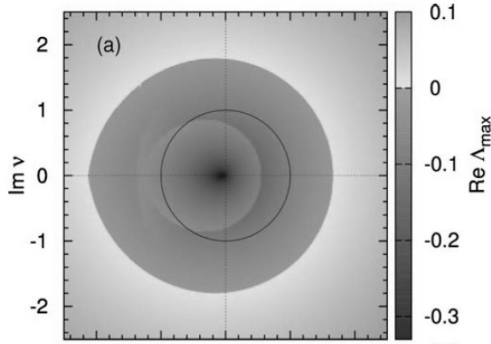
d. h. Topologie und lokale Dynamik können separat betrachtet werden.

Bem: MSF (also  $\Lambda(\nu)$ ) eine Funktion von  $\epsilon, \nu, \tau$  da Df an  
 synchron Lösung ausgewertet wird

Schwarze Ring: unidirektionalen Rings:

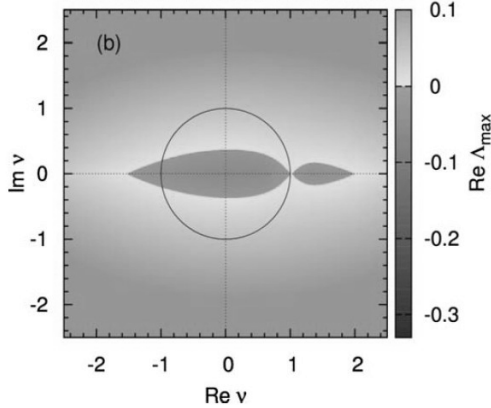
$$\nu_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

Eigenwerte liegen auf dem  
 Einheitskreis



$$\kappa = 0.3$$

$$\tau = 2\pi$$



$$\kappa = 0.08$$

$$\tau = 0.52\pi$$

$\Rightarrow$  Für  $\tau = 2\pi$  kann  
 synchrone Lösung stabilisiert  
 werden, wenn z.B. Topologie  
 ein unidirektionaler Ring ist