

5.3.4. Netzwerke aus Hopf - Normalformen

• ausgehend von 5.2 betrachten wir nun N gekoppelte Hopf - Normalformen

$$\dot{z}_j = (\underbrace{1+i}_{\omega=1} + \underbrace{(1+iD)}_{\text{superkrit.}}) |z_j|^2 z_j + \epsilon \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t)) \quad (3)$$

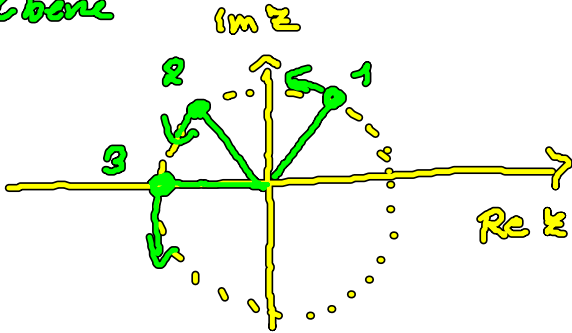
Kopplungsstärke $\epsilon = Ke^{i\beta} \in \mathbb{C}$

Kopplungsmatrix \underline{G}

Oszillatoren $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$
 \uparrow radius \leftarrow Phase

Invariante Zustände

• Veranschaulichung der Dynamik der N gekoppelten Oszillatoren in komplexer Ebene



• Wir suchen invariante Zustände für die gilt

$$\dot{r}_j = 0 \quad \oplus$$

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_m$$

Bem. $\oplus \equiv$ ECM Ansatz in 4.2.2
 wegen S^1 -Symmetrie der Gleichungen

Annahme: gleiche Amplitude, \Rightarrow
 aller Oszillatoren, konstanter
 Phasenunterschied

$$\boxed{\begin{aligned} r_j &= r_{s,m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \end{aligned}}$$

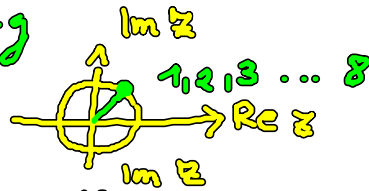
(II)
 $m \in \mathbb{N}$

Index m : klassifiziert mögliche invariante Zustände

$m = 0$ Synchron in-phasen Lösung

$$\tau_j = \tau_{s10}$$

$$\varphi_j = \Omega_0 t$$

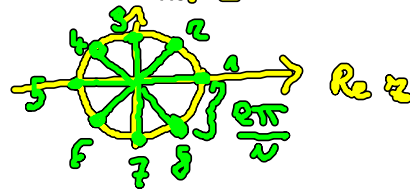


$N=8$

$m = 1$ Splay state

$$\tau_j = \tau_{s11}$$

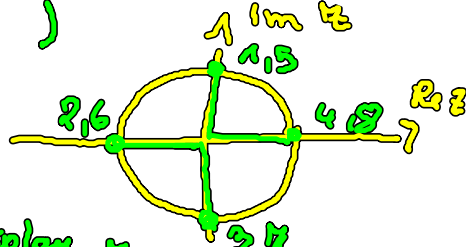
$$\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$



• jeder Oszillator hat andere Phase aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (sich drehendes Speicherband)

$m > 1$

Cluster Zustand (inphase innerhalb der Cluster konstanten Phasenunterschied zw. Clustern)



Bemerkung: für $N=8$ entspricht der Splay Zustand die gegenphasige Lösung (siehe 5.2)

$m > 1$ Zahl vorhandener Cluster M gegeben durch die kleinste gemeinsame Vielfache von m und N geteilt durch m

$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m} \quad (\text{Least common multiplier}) \quad N=8 \quad m=2 \Rightarrow 4 \text{ Cluster}$$

• Bestimmen der invarianten Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I)

In Amplitude und Phase lauten die Bestimmungsgleichungen

$$r_{s,m}^2 = - \left[\lambda - \sum_n G_{jn} K \sin \beta + K \sum_{n=1}^N G_{jn} \cos(\Omega) \right]$$

$$\Omega_m = 1 + \gamma r_{s,m}^2 - \left[G_{jn} K \sin \beta + K \sum_n G_{jn} \sin(\Omega) \right]$$

Wieder Annahme

konstante Zelensumme

$$\sum_n G_{jn} = \text{const} = 1 \quad \text{damit im synchron. Zustand alle Elemente gleichen Eingang bekommen}$$

Lösung für synchronen Zustand

$m = 0$

Ω_0
 Ω_0

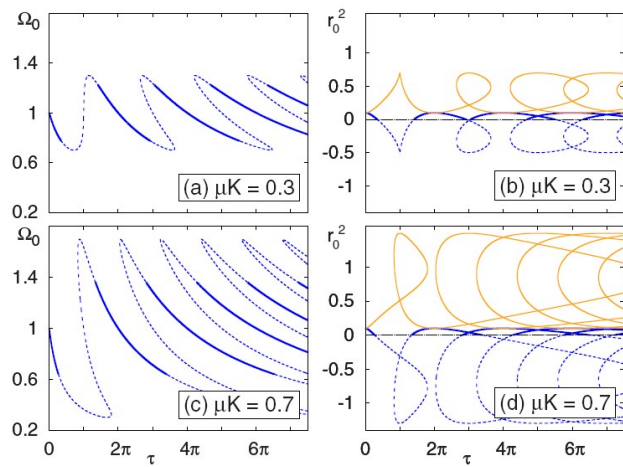


FIG. 1. (Color online) Collective frequency Ω_0 (left) and squared amplitude r_0^2 (right) of in-phase oscillation ($m=0$) vs time delay τ for different amplitude of the feedback strength [$\mu K=0.3$ and 0.7 in (a), (b) and (c), (d), respectively]. Black (blue) and gray (yellow) curves correspond to a feedback phase $\beta=0$ and $\beta=\Omega_0\tau$, respectively. Unphysical solutions ($r_0^2 < 0$) are dashed. For $\beta=\Omega_0\tau$ the curves in (a) and (c) have the same shape, but no unphysical solutions occur. Parameters: $\lambda=0.1$, $\omega=1$, and $\gamma=0$.

$\mu K = 0.3$
 $\mu K = 0.7$

Blue $\beta = 0$
Yellow $\beta = \Omega_0 \tau$

• Frage: Ist die gefundene Lösung stabil? Wenn ja hängt sie ab von der Topologie G_{ij} des Netzwerkes?

Strategie zur Analyse der Stabilität des synchronen Zustandes

1. Möglichkeit: • Betrachten Anwachsen einer Störung von der synchronen Dynamik für das gesamte Netzwerk
• Stabilität, wenn Störung abklingt

Problem: • Für große Netzwerke sehr aufwendig, da eine 2.N dim. DDE (delay differential equation) simuliert werden muss
• Für jede Topologie eine Berechnung nötig

2. Möglichkeit: Master stability function (MSF)

5.4 Master Stability Funktion

- Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchronen Lösung

Netzwerk! gekoppeltes System

$$\dot{\underline{x}}_i = \underline{f}(\underline{x}_i) + \sigma \sum G_{ij} \underline{h}(\underline{x}_j)$$

Topologie des Netzwerkes

Eigenwerte der Kopplungsmatrix $\underline{G} = \lambda_k$

lokale Dynamik

Betrachten $\delta \underline{x}$ um synchronen

Zustand \underline{x}_s : $\delta \underline{x}_i = \underline{x}_i - \underline{x}_s$

und untersuchen Lyapunov-Exp. Λ der Lösungen von

$$\otimes \delta \dot{\underline{x}} = D \underline{f} |_{\underline{x}_s} \delta \underline{x} + \sigma \underline{H} \delta \underline{x}$$

als Funktion von ν also $\Lambda(\nu)$

Dim: 2
(dim. des Knoten)
Ordnung $2N$

Stabilität der synchronen Lösung gegeben, wenn größter Lyapunov Exponent bei ν_k kleiner als Null für alle k

$$\Lambda(\nu) = MSF$$

Synchrone Lösung stabil wenn:

$$\Lambda(\nu_k) < 0 \quad \forall k \quad (\text{außer } \nu_k = 1)$$

aus Topologie

aus \otimes

Literatur

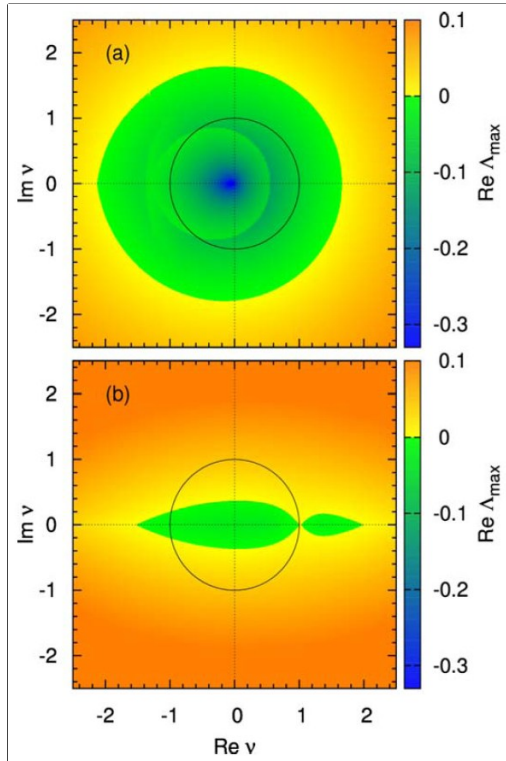
L.M. Pecora, T.L. Carroll
PRL 80, 2109 (1998)

Vorteile

- wenn $\Lambda(\nu)$ einmal bekannt aus \otimes kann leicht der Einfluss der Netzwerk Topologie betrachtet werden

d. h. Topologie und lokale Dynamik können separat betrachtet werden.

Bem: MSF (also $\Lambda(\nu)$) eine Funktion von σ, ν, τ da Df an
 synchron Lösung ausgewertet wird



Schwarze Ring: unidirektionalen Rings:

$$\psi_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

Eigenwerte liegen auf dem
 Einheitskreis

$$\kappa = 0.3$$

$$\zeta = 2\pi$$

$$\kappa = 0.08$$

$$\zeta = 0.52\pi$$

=> für $\zeta = 2\pi$ kann
 synchron Lösung stabilisiert
 werden, wenn z.B. Topologie
 ein unidirektionaler Ring ist