

## 5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher : determinist. dynam. Systeme

jetzt : stochastische dynam. Systeme

### 5.1 Rauschinduzierte Oszillationen u. Kohärenzresonanz

#### Stochast. Prozess

Zeitentwicklung eines Zufallsvar.  $X(t)$

( $\leftrightarrow$  im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabh., Wahrscheinl. verteil. durch Jaynes'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung geg.: verallg. kanon. Verteilung  $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_i M_i^v}$ ,  $M_i^v$  Zufallsvar.)

Verbundwahrscheinl. zeitabhängig :  $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3, \dots)$

Realisierungen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  von  $X(t)$

#### Markoff-Prozess

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)} \quad \text{bedingte Wahrsch.}$$

$$= p(x_1, t_1 | x_2, t_2) \quad \text{k hängt nur von der jüngsten Dat. ab}$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \quad \text{kein Gedächtnis!}$$

#### Langevin-Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft  $\xi(t)$  (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

# Reibung Rauschen

## Gauß'sches weißes Rauschen:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$\langle \dots \rangle =$  statist. Mittelung

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorrel.}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. gehorchen einer Gaußverteilung

## Autokorrel. fkt.

$$\underline{\chi}(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergod. Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\underline{\chi}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t) x(t+s) \quad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

$$\text{Fourier-Transform: } \hat{x}(\omega; T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t) \quad \text{in } t \in [-T, T]$$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

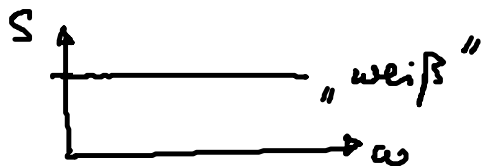
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega; T)|^2$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

## Wiener-Khinchin-Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen  $\xi(t)$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



# Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb eines Hopf-Bif.

Van der Pol - Osz. (1926, el. Stromkreis)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t) \quad \text{nichtlin. Osz.}$$

$D$  Rauschintensität  
 $\xi(t)$  Gauß'sches weißes Rauschen

$D=0$  : Fixpkt.  $x=y=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{tr} A = \varepsilon, \quad \det A = \omega_0^2$$

$\varepsilon=0$  Hopf-Bif.,  $\varepsilon < 0$  stabiler Fokus

$\varepsilon > 0$  instab. Fokus + LC

hier:  $\varepsilon = -0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0$

$\Rightarrow$  keine determinist. Osz.

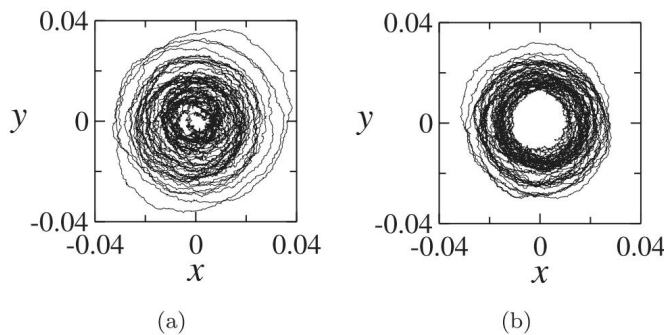
aber rauschinduzierte Osz. ( $D \neq 0$ )

Lit. Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)

Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)

Janson, Balanov, Schöll: in Handbook of Chaos Control (2008)

Schöll, Balanov, Janson: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)



rauschinduz.  
 Osz.  
 (VLP)

Fig. 1. Numerically simulated phase portraits of noise-induced oscillations of the Van der Pol system at  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon = -0.01$ ,  $D = 0.003$ : (a) without feedback  $K = 0$ ; (b) with feedback  $K = 0.2$ ,  $\tau = T_0$ . In both cases the system was integrated during 300 time units.

## 2. Beispiel : anregbares System (Typ II)

FitzHugh-Nagumo-Modell (Neuron)

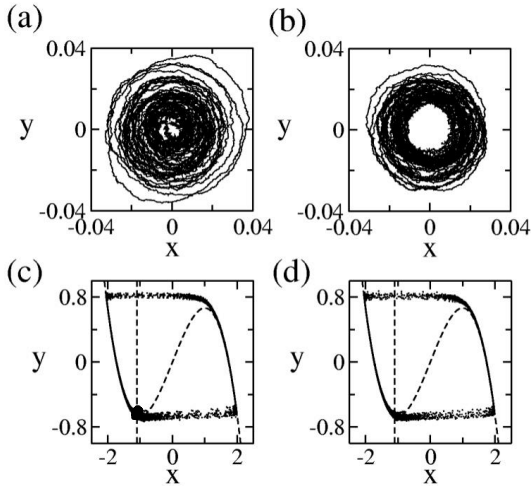
$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = x + a + D\xi(t) \end{cases}$$

Zeitskalenverh.  $\epsilon \ll 1$  ( $\epsilon = 0.01$ )

Anreg.schwelle  $a$  ( $a = 1.1$ )

$D = 0$  : Fixpkt.  $x = -a$ ,  $y = -a - \frac{a^2}{3}$  stabiler Kn. für  $a > 1$   
(anregbar)

(hier nicht betrachtet :  
 $a < 1$  inst. Fixpkt. + LC)



Lit.: Janson, PRL (2004)

$D \neq 0$  : rauschinduz. Osz.  
(spiking von Neuronen)

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at  $D = 0.003$ ; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at  $D = 0.09$  (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c)  $K = 0$ ; (b),(d)  $K = 0.2$ ,  $\tau = T_0$ .

## Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))

Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 807 (1993)

(stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen:

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintensität  $D_{opt}$

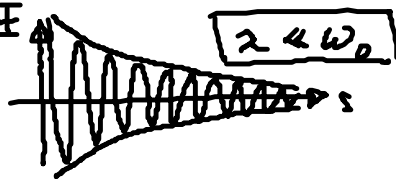
• Maß für Regularität:

$$\text{Korrelationszeit } t_{\text{cor}} = \frac{1}{\underline{\sigma}^2(0)} \int_0^{\infty} |\underline{\sigma}(s)| ds$$

Varianz Autokorrel.fkt,

( für lin. stoch. Prozess  $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$  )

$$\underline{\sigma}(s) = \underline{\sigma}(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$



$$t_{\text{cor}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

Approx.:  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$  Füllfaktor für  $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{\text{cor}} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma}(s) = \underline{\sigma}(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{\text{cor}}}} \cos(\omega_0 s) \quad (\text{exp. abkling. Korrel.})$$

