

7.2 Kontrolle zeitverzögert gekoppelter Neuronen

Schöll, Hiller, Hövel, Dahlem: Phil. Trans. Roy. Soc. A 367, 1079 (2009)

$$\epsilon \dot{x}_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C [x_2(t-\tau^c) - x_1(t)] + K [x_1(t-\tau^k) - x_1(t)]$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + a$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C [x_1(t-\tau^c) - x_2(t)] + K [x_2(t-\tau^k) - x_2(t)]$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + a$$

kein Rauschen!

Anregbares Regime ($a = 1.05$): Einzelsystem hat stab. Fixpkt.

(i) keine Kontrolle ($K=0$)

gekoppeltes System: symm. Fixpkt. $x_i^* = -a$, $y_i^* = \frac{a^3}{3} - a$ stabil

$$\delta \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} A & -1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \delta x + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta x(t-\tau^c)$$

$$A \equiv 1 - a^2 - C$$

char. Gl. $(1 - A\lambda + \epsilon\lambda^2)^2 - (\lambda C e^{-\lambda\tau^c})^2 = 0$

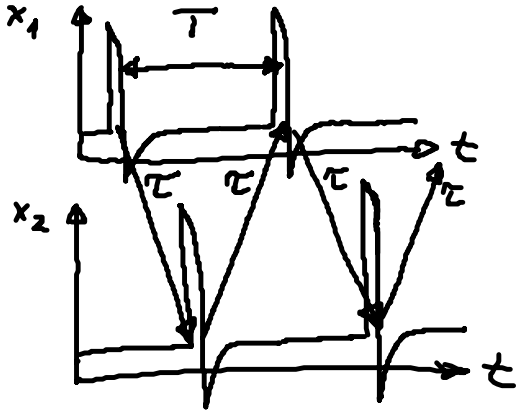
Faktorisierung! Keine Hopf-Bif., denn Ansatz $\lambda = i\omega$ in Im:

$$A = \pm C \cos \omega\tau$$

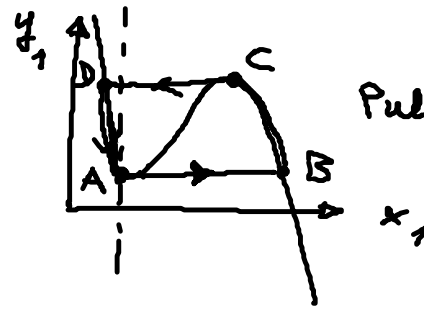
$$A = -|a^2 + C - 1|, \quad |A| = \underbrace{a^2 - 1 + C}_{> 0 \text{ (} a > 1)} > C$$

Obwohl der symm. Fixpkt. immer stabil ist, kann durch Delay eine period. Dsz. (Grenzzyklus) induziert werden (globale Bif.):

Delay-induz. Antiplasen-Dsz.:



Periode $T = 2\tau^c$ (vorausgesetzt τ ist groß genug)
 $\tau >$ recovery time



Pulsbreite $B \rightarrow C$

$B \hat{=} x=2$
 $D \hat{=} x=-2$
 $C \hat{=} x=1$

Näherung für Pulsbreite:

langsame Phasen $B \rightarrow C$ (firing), $D \rightarrow A$ (refractory): $y_1 \approx x_1 - \frac{x_1^3}{3}$ (x_1 -Nullcline)

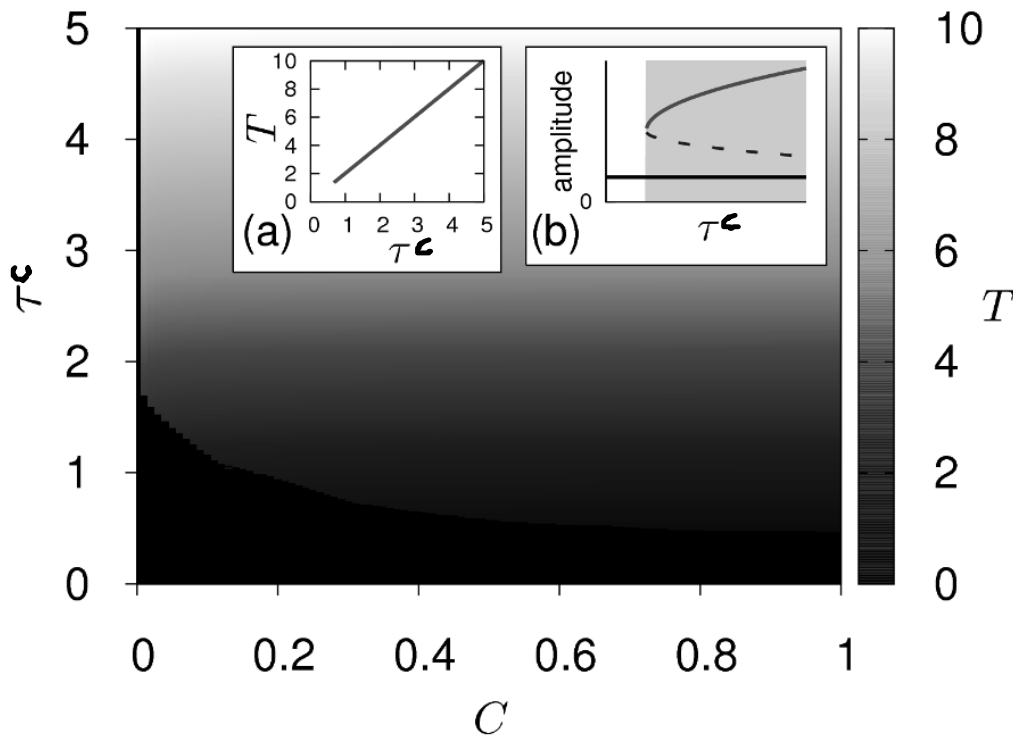
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1(1-x_1^2) = x_1 + a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_1 + a}{1-x_1^2} \Rightarrow \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} dx_1 = dt$$

$$\int_{\pm 2}^x dx_1 \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a \pm 2}{a + x} - a(\pm 2 - x) + 2 - \frac{x^2}{2} = t$$

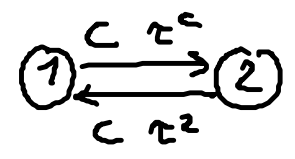
Pulsbreite: $B \rightarrow C$

$$T_f = \int_2^1 dx_1 \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a+2}{a+1} - a + \frac{3}{2}$$



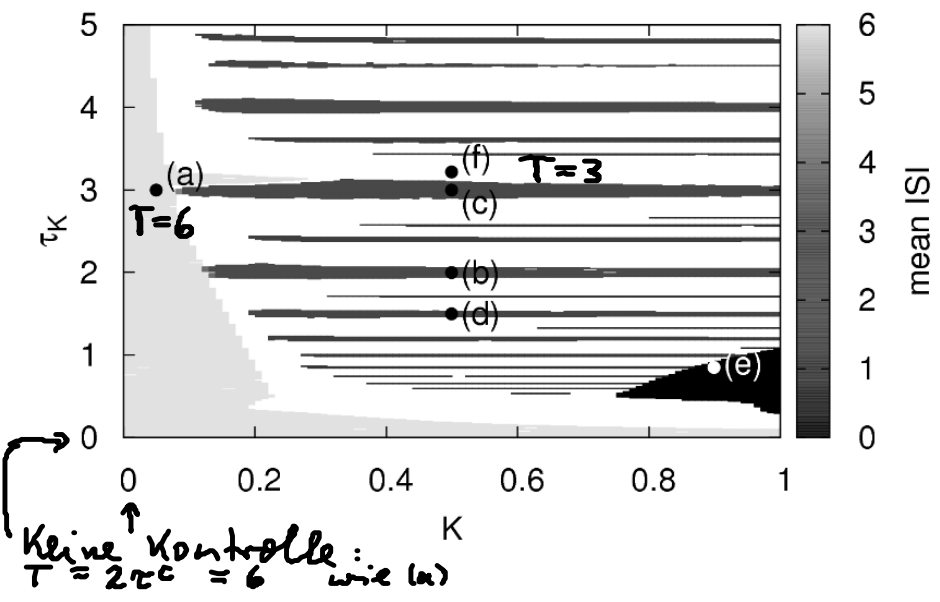
Delay-induzierte Antiphaseosz.

$$T = 2\tau^c$$

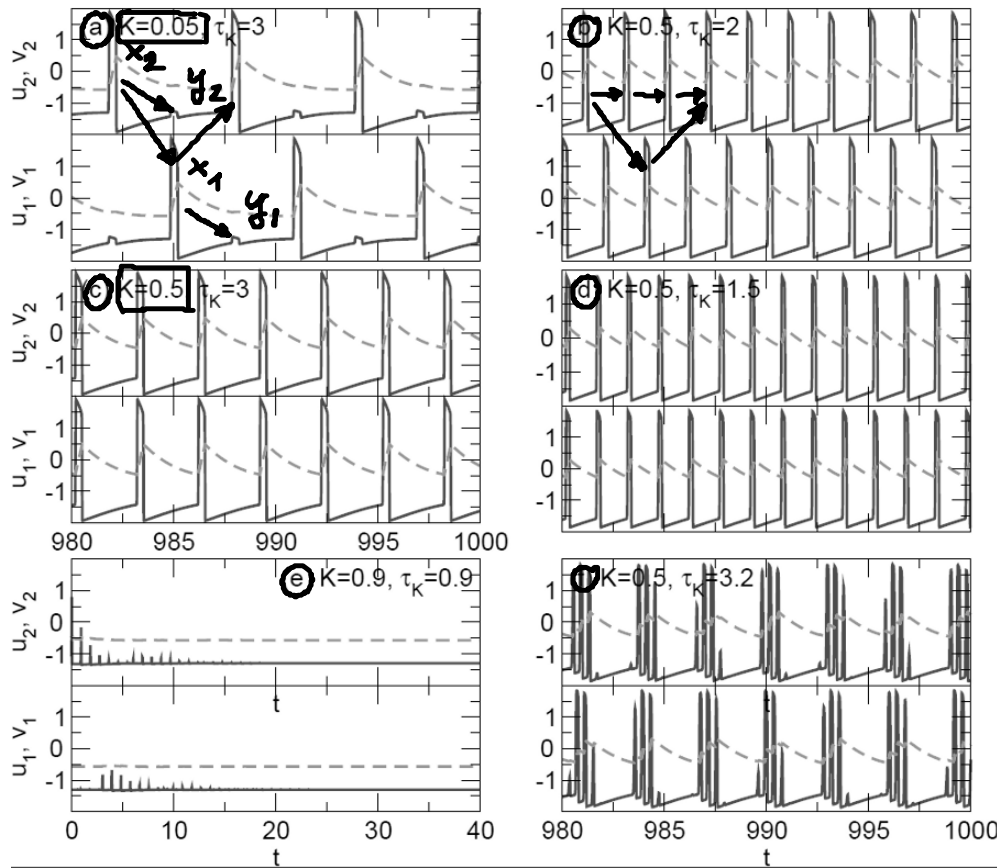


Mit zeitverzög. Rückkopplungskontrolle K, τ^K :

Kopplungspar.: $C = 0.5, \tau^c = 3$



Keine Kontrolle: $T = 2\tau^c = 6$ wie (a)



$$C = 0.5, \tau^C = 3$$

- (a) Selbstkoppl.: unter-schwellige Anregung nach $t = \tau^k$; volle Spike durch Koppl. nach $T = 2\tau^C$
- (c) $K = 0.5$ Selbstkoppl. stärker \Rightarrow Spike nach $T = \tau^k = \tau^C$ gleichphasige Osz.
- (b) Spike mit $3T = 2\tau^C = 3\tau^k$ Antiphasen-Osz.
- (d) $4T = 2\tau^C = 4\tau^k$ gleichphasig mit $T = 1.5$
- (e) amplitude death (keine Osz.)

Fazit : Kopplung u. Rückkoppl.kontrolle führen zu reichhaltigen Szenarien, gleich-/gegenphasige Synchronis., bursting, amplitude death

f) bursting (bei nicht rationalen Verhältnis τ^k/τ^C)

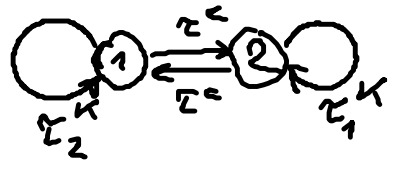
Resonanzen zwischen τ^k und τ^C :

$$N^k \tau^k = N^C 2\tau^C \quad N^k, N^C \in \mathbb{N}$$

(verallg. Synchronis.)

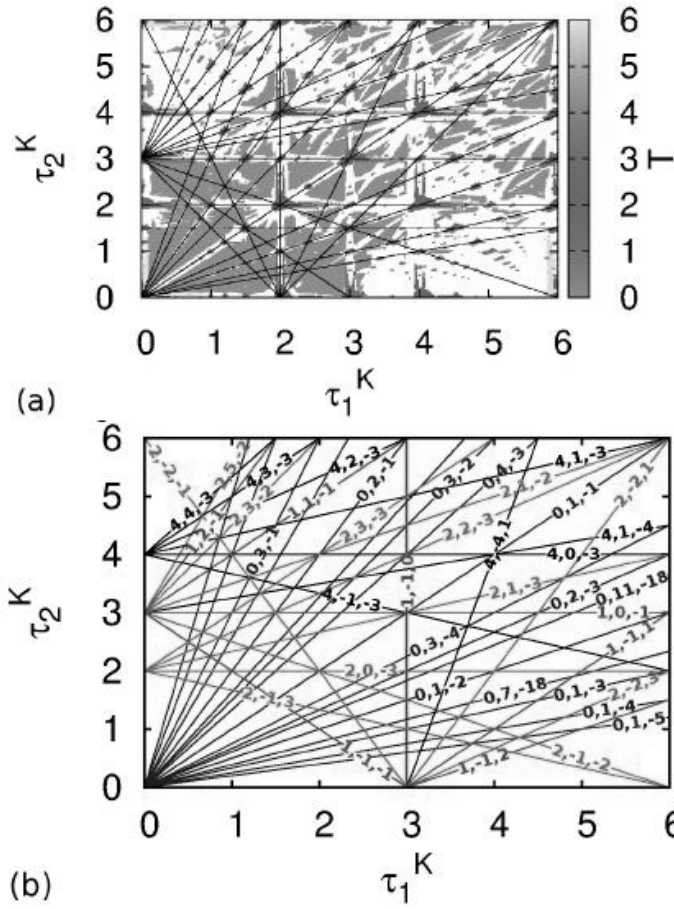
T_{ISI} (Periode) : $T = \frac{2\tau^C}{N^k} = \frac{\tau^k}{N^C}$

verschiedene Selbstkopplungs-Versögerungszeiten τ_1^k, τ_2^k :



$$l\tau^C + m\tau_1^k + n\tau_2^k = 0 \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B. festes τ^C :



Resonanzlinien
 $l, m, n \in \mathbb{Z}$

FIG. 11: (Color online) (a) Interspike intervals T in the (τ_1^K, τ_2^K) -plane for $\tau^C = 3, K = 0.5$. The black lines are added according to Eq. (31); (b) resonance lines given by Eq. (31) including the integer values of l, m , and n . Other parameters as in Fig. 2.

Panchar, Rosin, Hövel, Schöll, in preparation (2012)