

## 7.2 Kontrolle zeitverzögert gekoppelte Neuronen

Schöll, Hiller, Hövel, Dahlem: Phil. Trans. Roy. Soc. A 367, 1079 (2003)

$$\epsilon \dot{x}_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + C [x_2(t-\tau^c) - x_1(t)] + K [x_1(t-\tau^k) - x_1(t)]$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + a$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + C [x_1(t-\tau^c) - x_2(t)] + K [x_2(t-\tau^k) - x_2(t)]$$

$$\dot{y}_2 = x_2 + a$$

kein Rauschen!

Anregbares Regime ( $a = 1.05$ ): Einzelsystem hat stab. Fixpkt.

(i) keine Kontrolle ( $K=0$ )

gekoppeltes System: symm. Fixpkt.  $x_i^* = -a$ ,  $y_i^* = \frac{a^3}{3} - a$  stabil

$$\delta \dot{x} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} A & -1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \delta x + \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta x(t-\tau^c)$$

$$A \equiv 1 - a^2 - C$$

char. Gl.  $(1 - A\lambda + \epsilon\lambda^2)^2 - (\lambda C e^{-\lambda\tau^c})^2 = 0$

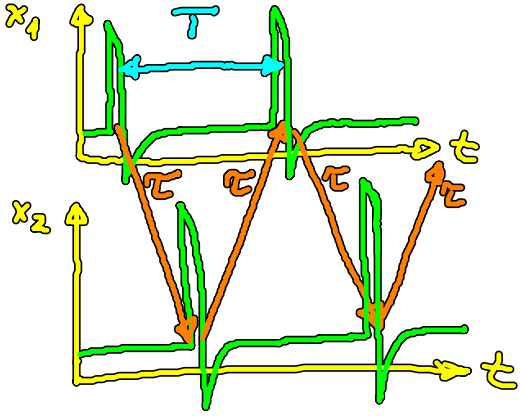
Faktorisierung! Keine Hopf-Bif., denn Ansatz  $\lambda = i\omega$  in Im:

$$A = \pm C \cos \omega\tau$$

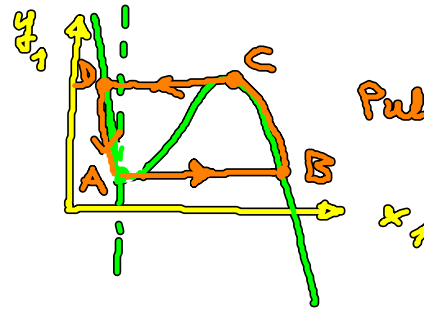
$$A = -|a^2 + C - 1|, \quad |A| = \underbrace{a^2 - 1 + C}_{> 0 \text{ (} a > 1)} > C$$

Obwohl der symm. Fixpkt. immer stabil ist, kann durch Delay eine period. Dsz. (Grenzzyklus) induziert werden (globale Bif.):

Delay-induz. Antiplaces-Dsz.:



Periode  $T = 2\tau^c$  (vorausgesetzt  $\tau$  ist groß genug)  
 $\tau >$  recovery time



Pulsbreite  $B \rightarrow C$

$B \hat{=} x=2$   
 $D \hat{=} x=-2$   
 $C \hat{=} x=1$

Näherung für Pulsbreite:

langsame Phasen  $B \rightarrow C$  (firing),  $D \rightarrow A$  (refractory):  $y_1 \approx x_1 - \frac{x_1^3}{3}$  ( $x_1$ -Nullclini)

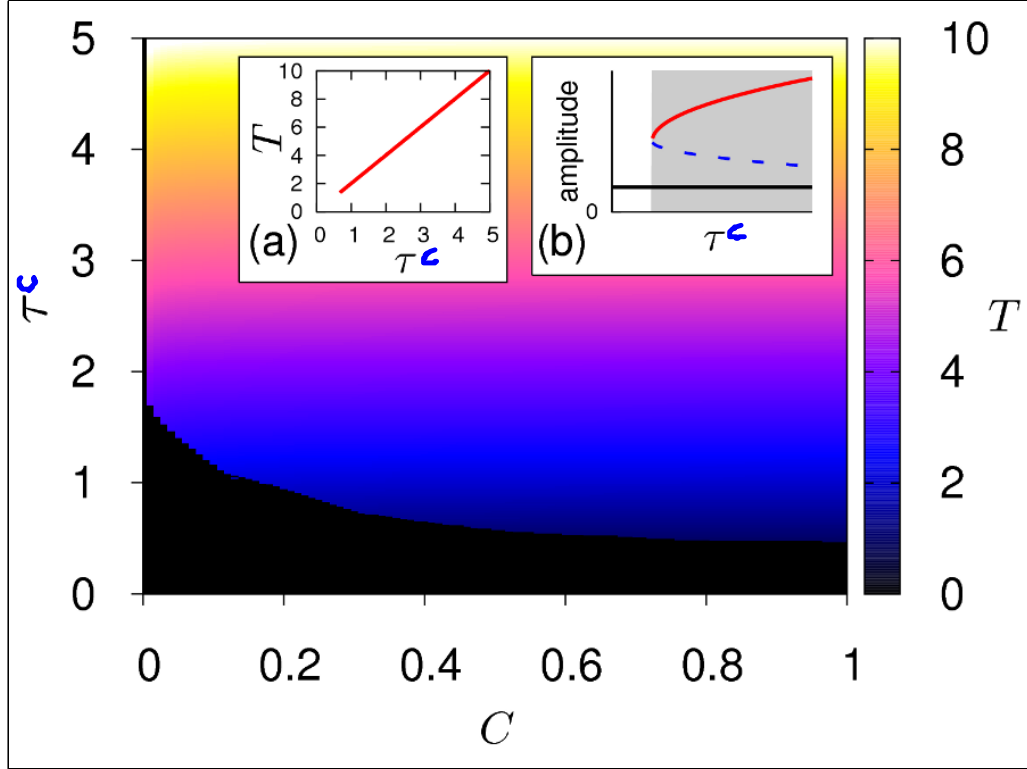
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1(1-x_1^2) = x_1 + a$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_1 + a}{1-x_1^2} \Rightarrow \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} dx_1 = dt$$

$$\int_{\pm 2}^x dx_1 \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a \pm 2}{a + x} - a(\pm 2 - x) + 2 - \frac{x^2}{2} = t$$

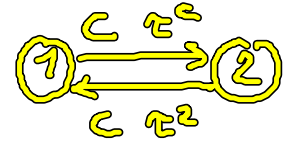
Pulsbreite:  $B \rightarrow C$

$$T_f = \int_2^1 dx_1 \frac{1-x_1^2}{x_1 + a} = (a^2 - 1) \ln \frac{a+2}{a+1} - a + \frac{3}{2}$$

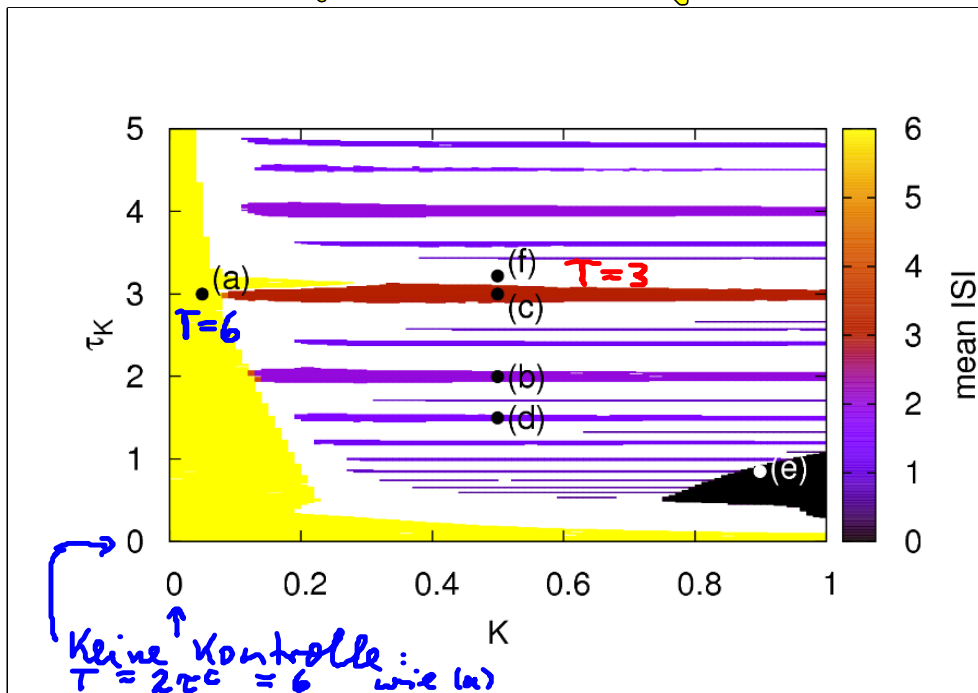


Delay-induzierte Antiphaseosz.

$$T = 2\tau^C$$



Mit zeitverzög. Rückkopplungskontrolle  $K, \tau^K$ :

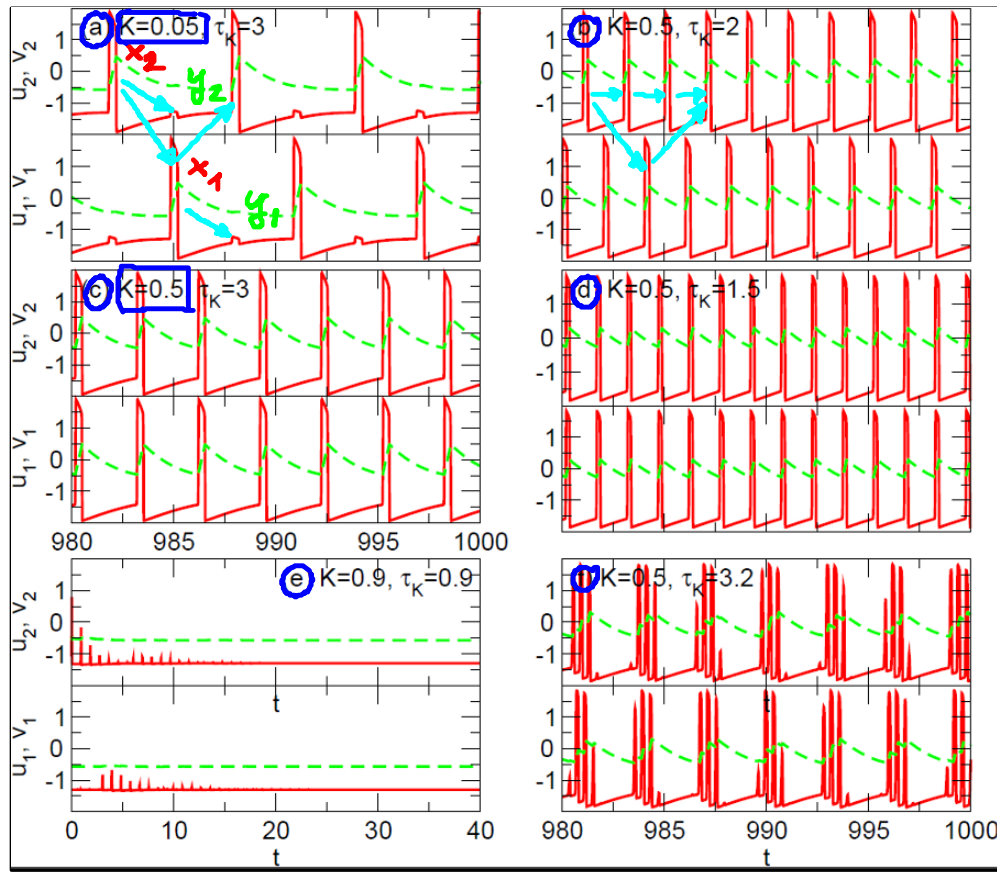


Kopplungspar.:  
 $C = 0.5, \tau^C = 3$

keine Kontrolle:  
 $T = 2\tau^C = 6$  wie (a)

$c = 0.5, \tau^c = 3$

- (a) Selbstkoppl.: unter-schwellige Anregung nach  $t = \tau^k$ , volle Spike durch Koppl. nach  $T = 2\tau^c$
- (c)  $K = 0.5$  Selbstkoppl. stärker  $\Rightarrow$  Spike nach  $T = \tau^k = \tau^c$  gleichphasig Osz.
- (b) Spikes mit  $3T = 2\tau^c = 3\tau^k$  Antiphasen-Osz.
- d)  $4T = 2\tau^c = 4\tau^k$  gleichphasig mit  $T = 1.5$
- e) amplitude death (keine Osz.)



Fazit : Kopplung u. Rückkoppl.kontrolle führen zu reichhaltigen Szenarien, gleich-/gegenphasige Synchronis., bursting, amplitude death

f) bursting (bei nicht-rationalen Verhältnis  $\tau^k/\tau^c$ )

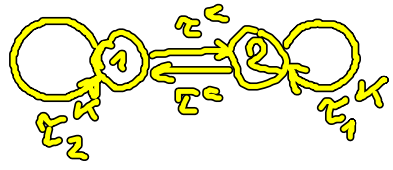
Resonanzen zwischen  $\tau^k$  und  $\tau^c$  :

$$N^k \tau^k = N^c 2\tau^c \quad N^k, N^c \in \mathbb{N}$$

(verallg. Synchronis.)

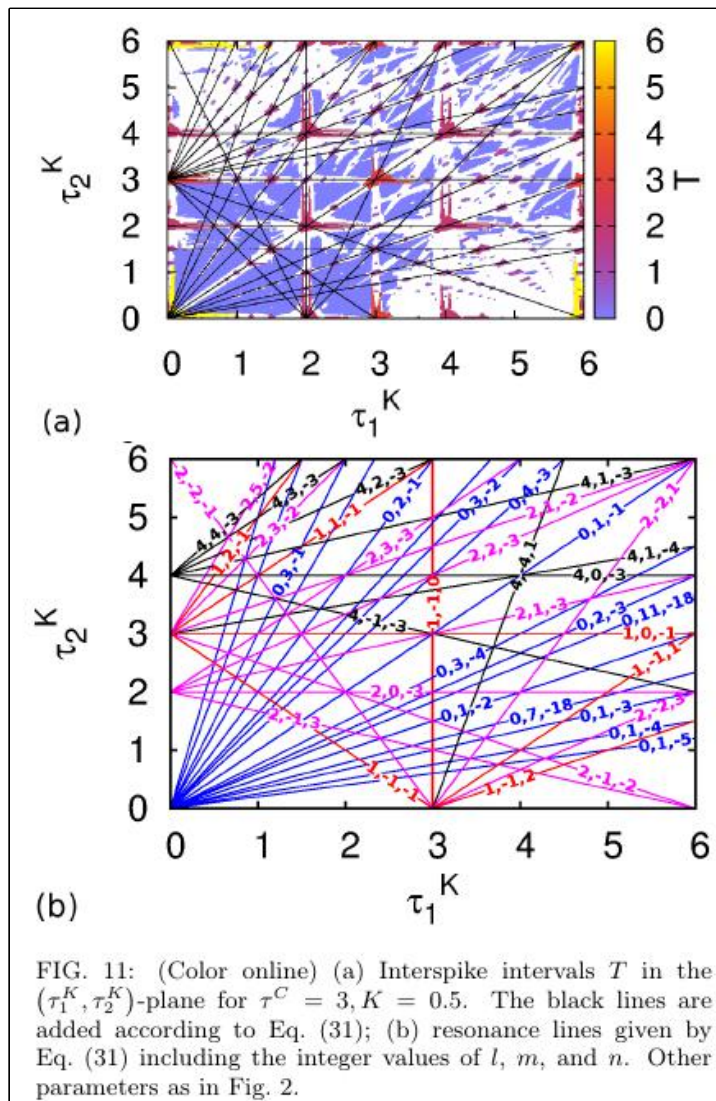
$T_{ISI}$  (Periode) :  $T = \frac{2\tau^c}{N^k} = \frac{\tau^k}{N^c}$

verschiedene Selbstkopplungs-Versögerungszeiten  $\tau_1^k, \tau_2^k$  :



$$l\tau^c + m\tau_1^k + n\tau_2^k = 0 \quad l, m, n \in \mathbb{Z}$$

z.B.  $\tau^C$ :



Resonanzlinien  
 $l, m, n \in \mathbb{Z}$

Panchuk, Rozin, Hövel, Schöll, in preparation (2012)