

5. Ein dimensionaler harmonischer Oszillator

• volles Problem:

$$\boxed{m \ddot{x} = F_{\text{ges}}(x, \dot{x}, t)} \quad (5.1)$$
$$\text{mit } F_{\text{ges}}(x, \dot{x}, t) = -f x - \alpha \dot{x} + F(t)$$

5.1 Unge dämpfte freie Bewegung

a) Lösung:

$$\cdot \boxed{m \ddot{x} + f x = 0} \quad (5.3) \quad (5.4)$$

$$\cdot \text{Lsg: } \boxed{x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m}}$$

... Eigenfrequenz

$$\left. \begin{array}{l} A^2 = a^2 + b^2 \\ \tan \varphi = \frac{b}{a} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = A \cos \varphi \\ b = A \sin \varphi \end{array} \right\} = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

A ... Amplitude } der Schwingung
 φ ... Phase }

$$\text{NB: } \cos(\omega_0 t - \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi + \sin \omega_0 t \sin \varphi$$

b) komplexe Darstellung: $z = x + iy \in \mathbb{C} \quad (5.5)$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Linearität}} \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (5.6)$$

• syst. Lsg. durch Ansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ in (5.6)

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \boxed{\lambda^2 = -\omega_0^2} \dots \text{charakt. Polynom} \quad (5.7)$$

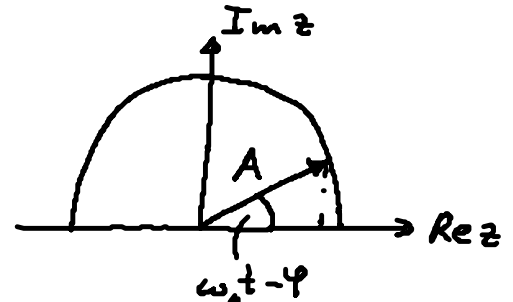
$$\boxed{[\sqrt{-1} = i]} \rightarrow \boxed{\lambda = \pm i\omega_0}$$

$$z(t) = \bar{a} e^{i\omega_0 t} + \bar{b} e^{-i\omega_0 t}, \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$$

NB: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$... Eulersche Relation

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re} [A e^{i(\omega_0 t - \varphi)}] \quad (5.8)$$

o.B.d.A
(i) $\bar{a} = A e^{-i\varphi}$
 $\bar{b} = 0$

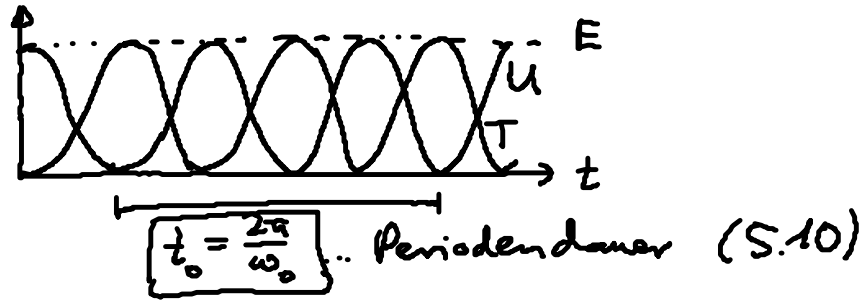


(ii) i.a.: bestimme \bar{a}, \bar{b} so,
daß Anfangsbed. erfüllt sind

c) Energiebilanz: ($\varphi=0 \rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t$)

• $E = T + U$ mit $U = \frac{f}{2} x^2 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -f x$, $f = m \omega_0^2$ (5.4)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ U &= \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} E = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2 \quad (5.9)$$



• Mittelwerte:

$$\left. \begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt T(t) \stackrel{(S.9)}{=} E \frac{1}{\omega_0 t_0} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = \frac{E}{2} \\ \langle U \rangle &= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} dt U(t) = \dots = \frac{E}{2} \end{aligned} \right\} (S.11)$$

... Gleichverteilung im Mittel !!

$$[NB: \text{Trick } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{1}{2}]$$

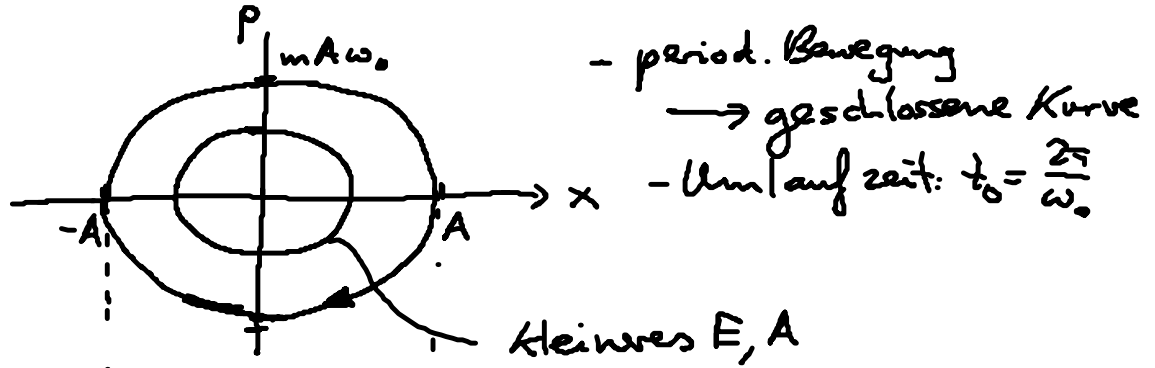
d) Bewegung im Phasenraum . x-p-Ebene

• p konjugierte Koord./Impuls zu x [s. analyt. Mechanik]

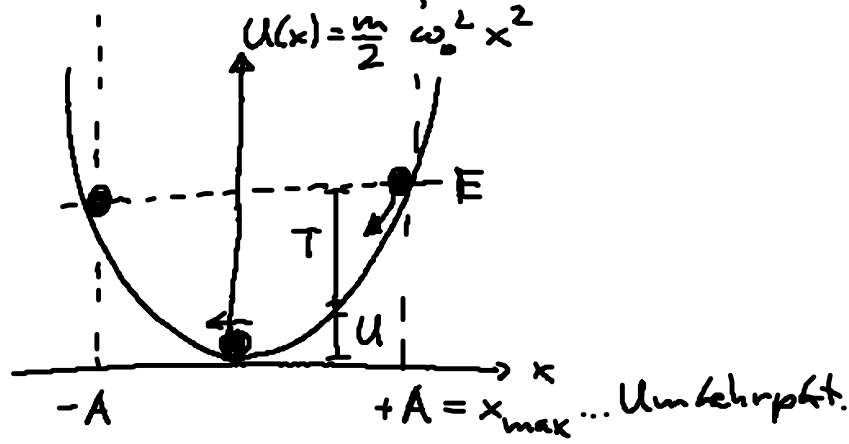
$$[px] = [Et] =]s \dots \text{Wirkung}$$

• hier: $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$
 $p(t) = m \dot{x}(t) = -m A \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ } Parametrisierung einer Ellipse

• Phasenporträt:



• vgl.



• Anharmonischer Oszillator: qualitatives Phasenporträt → Übungen

• Wirkung einer Bewegung:

$$S := \oint p(x) dx = \int_0^{t_0} p \dot{x} dt \quad (5.12)$$

ein eingeschlossene Umlauf Fläche im Phasenraum

- harm. Oszillator: $S = \pi m \omega_0 A^2 \stackrel{(5.9)}{=} 2\pi \frac{E}{\omega_0} = E t_0 ! \quad (5.13)$

Ellipse: πab $E = \frac{m}{2} \omega_0^2 A^2$

- Klassik: S kontinuierlich

QM: $S_n = 2\pi \hbar (n + \frac{1}{2}), n = 0, 1, \dots \infty \quad (5.14)$

$E = \frac{S}{t_0} \xrightarrow{(5.13)} E_n = \hbar \omega_0 (n + \frac{1}{2})$

Plancksche Quantenhypothese

Bohr: S_n auch für e^- in Atom!

5.2 Gedämpfter, freier harmonischer Oszillator

(5.1) $\rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + f x = 0$ $\xrightarrow{x = \text{Re} z}$ $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ (5.16)

$\underbrace{\quad}_{\text{nicht konservatives System}}$
 $f = m\omega_0^2$ (5.14)
 $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$ (5.15)

$[\gamma] = \frac{1}{s}!$

• Lsg. ansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ in (5.16)

\rightarrow charakt. Polynom: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$

\Rightarrow $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (5.17)

allg. Lsg. $z(t) = \bar{a} e^{\lambda_1 t} + \bar{b} e^{\lambda_2 t}$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$ (5.18)

• Erinnerung: Energiebilanz: $\frac{d}{dt}(T+U) = F_{\text{diss}} \dot{x} = -\alpha \dot{x}^2$... dissip. Energie pro Zeiteinheit (2.25)

• Fallunterscheidung:

a) geringe Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

$\sqrt{-1} = i \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega_d$, $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$ (5.19)

(5.18) \rightarrow reelle Lsg:

$$x(t) = \text{Re} z(t) = \text{Re} [A e^{-\gamma t} e^{i(\omega_d t - \varphi)}]$$

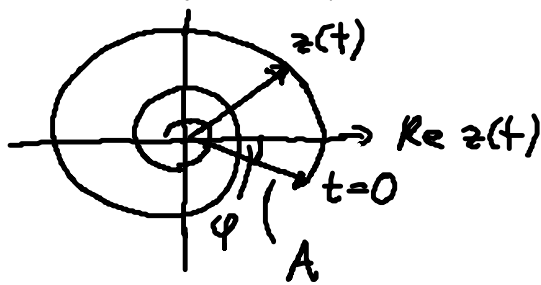
$\bar{a} = A e^{-i\varphi}$

$\bar{b} = 0$

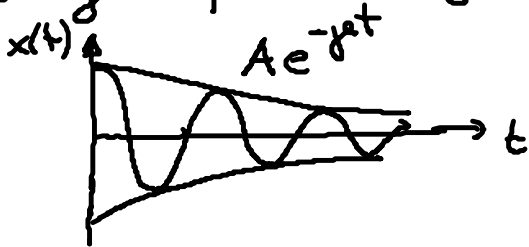
$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \varphi)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{gedämpfte Amplitude}}$ $\underbrace{\quad}_{\text{period. Schwingung}}$

• Zeigerdiagramm für komplexe Lsg.



• reelle Lsg: = frei abklingende Schwingung mit ω_d :



γ^{-1} ... Relaxationszeit

2 Kenngrößen:

1. Relaxationszeit / Abklingzeit:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \stackrel{(5.15)}{=} \frac{2m}{\alpha} \quad (5.21)$$

2. Oszillatorgüte:

$$Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie: } T+U}{\text{Energieverlust pro Periode: } \frac{2\pi/\omega_d}{\alpha} \int_0^{2\pi/\omega_d} \dot{x}^2 dt} \quad (5.22)$$

hohe Güte: $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$:

$$Q \propto 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \omega_d^2 \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega_d} \sin^2(\omega_d t - \varphi) dt}_{\pi/\omega_d}} \quad (5.9)$$

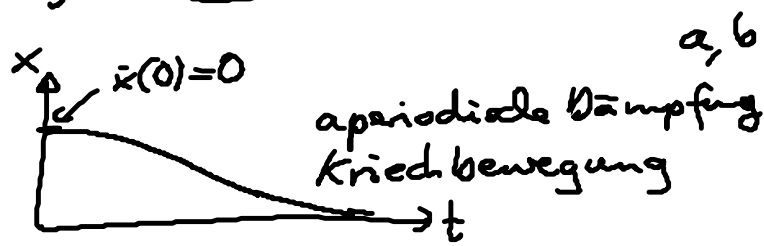
$$\omega_d \approx \omega_0 \rightarrow \boxed{Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1} \quad (5.23)$$

b) starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$

rein
expt. Abfall

$$x(t) = a e^{-(\gamma - \sqrt{\dots})t} + b e^{-(\gamma + \sqrt{\dots})t} \quad (5.24)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

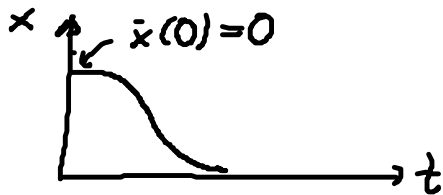


c) aperiodische Grenzfall: $\gamma = \omega_0 \rightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma$

Lsg. entartet

„Matte“

$$x(t) = a e^{-\gamma t} + b t e^{-\gamma t} \quad (5.25)$$



Anwendung: ideal für MeßgröÙe
ideale Dämpfung, klingt am schnellsten ab: $\gamma > \gamma - \sqrt{\dots}$
→ Zeiger geht am schnellsten gegen Meßwert