5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

- volles Problem:

$$\boxed{\begin{gathered} m\ddot{x} = F_{ges}(x, \dot{x}, t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) = -fx - \alpha\dot{x} + F(t) \end{gathered}} \qquad (5.1)$$

5.1 Ungedämpfte freie Bewegung

a) Lösung:

- $\boxed{m\ddot{x} + fx = 0}$ (5.3)

(5.4)

- Lsg: $x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$, $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$ ... Eigenfrequenz

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= a^2 + b^2 \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} a &= A\cos\varphi \\ b &= A\sin\varphi \end{aligned}\right\} = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

$\left.\begin{aligned} &A \ldots \text{Amplitude} \\ &\varphi \ldots \text{Phase} \end{aligned}\right\}$ der Schwingung

NB: $\cos(\omega_0 t - \varphi) = \cos\omega_0 t\cos\varphi + \sin\omega_0 t\sin\varphi$

b) komplexe Darstellung: $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (5.5)

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}+\omega_0^2 x=0\\ \ddot{y}+\omega_0^2 y=0\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Linearität}]{} \ddot{z}+\omega_0^2 z=0 \qquad (5.6)$$

- syst. Lsg. durch Ansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ in (5.6)

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \longrightarrow \boxed{\lambda^2 = -\omega_0^2}$$ … „charakt. Polynom"

$$[\sqrt{-1} = i] \longrightarrow \boxed{\lambda = \pm i\omega_0} \qquad (5.7)$$

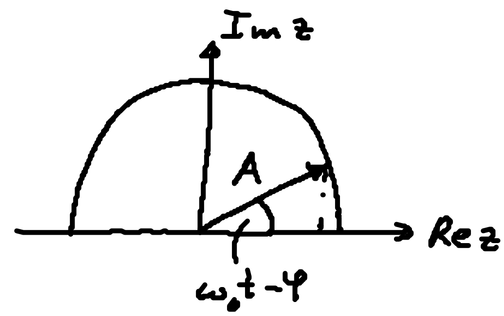
$$z(t) = \bar{a}\, e^{i\omega_0 t} + \bar{b}\, e^{-i\omega_0 t} \quad , \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$$

NB: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ … Eulersche Relation

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \underset{\text{o.B.d.A}}{=} \mathrm{Re}\left[A\, e^{i(\omega_0 t - \varphi)}\right] \qquad (5.8)$$

(i) $\bar{a} = A e^{-i\varphi}$

$\bar{b} = 0$

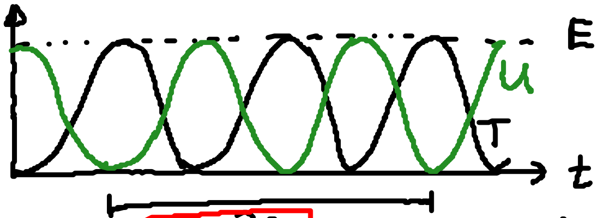


(ii) i.a.: bestimme $\bar{a}, \bar{b}$ so, daß Anfangsbed. erfüllt sind

c) Energiebilanz: $(\varphi = 0 \longrightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t)$

- $E = T + U$ mit $U = \frac{f}{2}x^2 \longrightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = -fx$, $\underset{(5.4)}{f = m\omega_0^2}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ U = \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{array}\right\} E = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2} \qquad (5.9)$$



$$\boxed{t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \;\dots\; \text{Periodendauer} \qquad (5.10)$$

• Mittelwerte:

$$\left.\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} dt\, T(t) \underset{(5.9)}{=} E\,\frac{1}{\omega_0 t_0}\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega_0 t)\, d(\omega_0 t) = \frac{E}{2} \\
\langle U \rangle &= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} dt\, U(t) = \quad \dots \quad - \quad = \frac{E}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (5.11)$$

... Gleichverteilung im Mittel !!

[NB: Trick $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1\, dx = \frac{1}{2}$]

d) Bewegung im Phasenraum. $\boxed{x-p-\text{Ebene}}$

• p konjugierte Koord./Impuls zu x [s. analyt. Mechanik]

$$[px] = [Et] = \mathrm{Js} \;\dots\; \text{Wirkung}$$

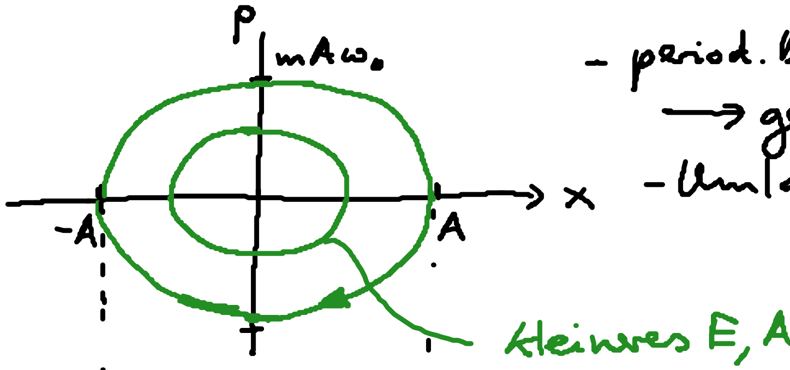
• hier:

$$\left.\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega_0 t) \\
p(t) &= m\dot{x}(t) = -m A\omega_0 \sin(\omega_0 t)
\end{aligned}\right\} \quad \text{Parameterdarstellung einer Ellipse}$$

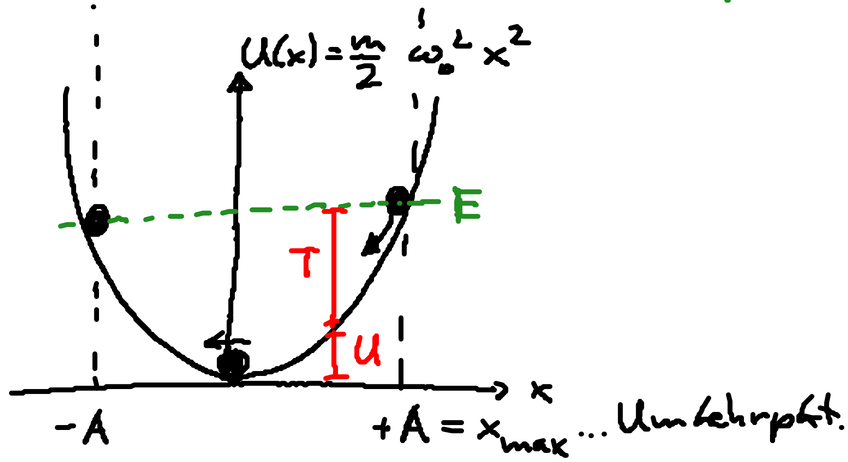
· Phasenporträt:

– period. Bewegung
$\longrightarrow$ geschlossene Kurve

– Umlaufzeit: $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$



· vgl.



· Anharmonischer Oszillator: qualitatives Phasenporträt $\longrightarrow$ Übungen

· Wirkung einer Bewegung:

$$\boxed{S := \underbrace{\oint p(x)\,dx}_{\text{eingeschlossene Fläche im Phasenraum}} = \int_0^{t_0} p\,\dot{x}\,dt} \qquad (5.12)$$

ein Umlauf

– harm. Oszillator: $S = \pi m \omega_0 A^2 \underset{(5.9)}{=} 2\pi \frac{E}{\omega_0} = E t_0$! (5.13)

Ellipse: $\pi a b$

$E = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2$

– Klassik: S kontinuierlich

QM: $S_n = 2\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, 1, \ldots \infty$ } (5.14)

$\xrightarrow[(5.13)]{E = S/t_0}$ $\underbrace{E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)}_{\text{Plancksche Quantenhypothese}}$

<u>Bohr</u>: S_n auch für e^- im Atom!

5.2 Gedämpfter, freier harmonischer Oszillator

- $(5.1) \longrightarrow \quad m\ddot{x} + \underbrace{\alpha \dot{x}}_{\text{nicht konservatives System}} + f x = 0 \quad \xrightarrow[\boxed{f = m\omega_0^2\ (5.4),\ \gamma = \frac{\alpha}{2m}}]{x = \mathrm{Re}\, z} \quad \ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (5.16)$

$\gamma = \frac{\alpha}{2m}$ (5.15) $\quad [\gamma] = \frac{1}{s}\,!$

- Lsg. ansatz: $z(t) \sim e^{\lambda t}$ in (5.16)

$\longrightarrow$ charakt. Polynom: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad (5.17)$$

allg. Lsg. $z(t) = \bar{a}\, e^{\lambda_1 t} + \bar{b}\, e^{\lambda_2 t}$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$ (5.18)

- Erinnerung: Energiebilanz (2.25): $\frac{d}{dt}(T+U) = F_{diss}\,\dot{x} = -\alpha \dot{x}^2$ ... dissip. Energie pro Zeiteinheit

- <u>Fallunterscheidung</u>:

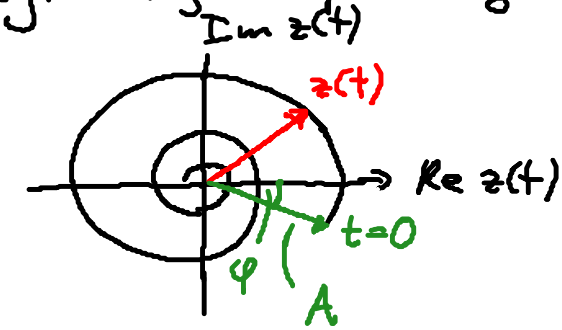
a) <u>geringe Dämpfung</u>: $\gamma < \omega_0$

$\sqrt{-1} = i \longrightarrow \quad \boxed{\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega_d \quad , \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0} \quad (5.19)$

(5.18) $\longrightarrow$ reelle Lsg:

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \underset{\substack{\bar{a} = A e^{-i\varphi} \\ \bar{b} = 0}}{=} \mathrm{Re}\left[A e^{-\gamma t} e^{i(\omega_d t - \varphi)}\right] = \underbrace{A e^{-\gamma t}}_{\text{„gedämpfte Amplitude"}} \underbrace{\cos(\omega_d t - \varphi)}_{\text{period. Schwingung}}}$$

• Zeigerdiagramm für komplexe Lsg.



• reelle Lsg.: = frei abklingende Schwingung mit ω_d:

γ^{-1} ... Relaxationszeit

<u>2 Kenngrößen:</u>

1. Relaxationszeit/Abklingzeit: $\boxed{\tau = \frac{1}{\gamma} \overset{(5.15)}{=} \frac{2m}{\alpha}}$ (5.21)

2. Oszillatorgüte:

$$\boxed{Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie}: T+U}{\text{Energieverlust pro Periode}: \alpha\int_0^{2\pi/\omega_d} \dot{x}^2\, dt}} \quad (5.22)$$

hohe Güte: $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$:

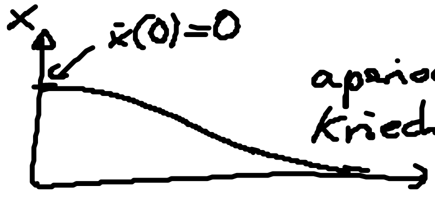
$$Q \approx 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t}\, \omega_d^2 \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega_d} \sin^2(\omega_d t - \varphi)\, dt}_{\pi/\omega_d}} \quad (5.9)$$

$\omega_d \approx \omega_0 \longrightarrow \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1}$ (5.23)

b) starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0 \longrightarrow \lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$

$$\xrightarrow[\text{expt. Abfall}]{\text{rein}} \quad \boxed{x(t) = a\, e^{-(\gamma - \sqrt{\dots})t} + b\, e^{-(\gamma + \sqrt{\dots})t}} \qquad (5.24)$$

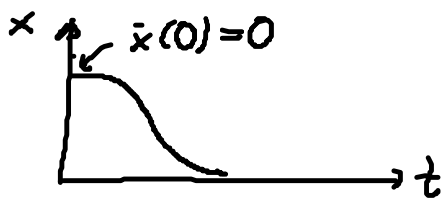
$a, b \in \mathbb{R}$



aperiodische Dämpfung
Kriechbewegung

c) aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0 \longrightarrow \underbrace{\lambda_{1/2} = -\gamma}_{\text{Lsg. entartet}}$

$$\xrightarrow[\text{„Mathe"}]{} \quad \boxed{x(t) = a\, e^{-\gamma t} + b t\, e^{-\gamma t}} \qquad (5.25)$$



Anwendung: ideal für Meßgeräte
ideale Dämpfg, klingt am schnellsten ab: $\gamma > \gamma - \sqrt{\dots}$
$\longrightarrow$ Zeiger geht am schnellsten gegen Meßwert