

• Oszillatorgüte:

$$Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie: } \overline{T+U}}{\text{Energieverlust pro Periode: } \alpha \int_0^{2\pi/\omega_d} \dot{x}^2 dt} \quad (5.22)$$

hohe Güte: $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{\alpha} \gg \frac{1}{\omega_0}$

$$\text{also: } Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \omega_d^2 \int_0^{2\pi/\omega_d} \sin^2(\omega_d t - \varphi) dt} \quad (5.23)$$

$\omega_d \approx \omega_0$

$$Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1 \quad (5.23)$$

5.3 Harmonischer Oszillator mit eingepprägter Kraft (erzwungene Schwingung)

• Grundgl.: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (5.26)$

allg. Lsg.: $x(t) = \underbrace{x_{\text{hom}}(t)}_{\text{bekannt}} + \underbrace{x_{\text{part}}(t)}_{\text{unbekannt}} \quad (5.27)$

a) harmonische Kraft: $F(t) = F_\omega \cos \omega t$

• Übergang ins Komplexe: $x(t) = \text{Re } z(t)$
 $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_\omega}{m} e^{i\omega t} \quad (5.28)$

$\text{Re } e^{i\omega t} = \cos \omega t!$

• Erfahrung: nach Einschwingen folgt Oszillator der Kraft

→ Ansatz: $z_{\text{part}}(t) = A_\omega e^{i\omega t} \quad (5.29)$

in (5.28): $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A_\omega e^{i\omega t} = \frac{F_\omega}{m} e^{i\omega t}$

$$\rightarrow x(t) = \underbrace{\beta e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \varphi)}_{x_{\text{hom}}(t)} + \underbrace{|\chi(\omega)| \frac{F_0}{m} \cos[\omega t - \delta(\omega)]}_{x_{\text{part}}(t)}$$

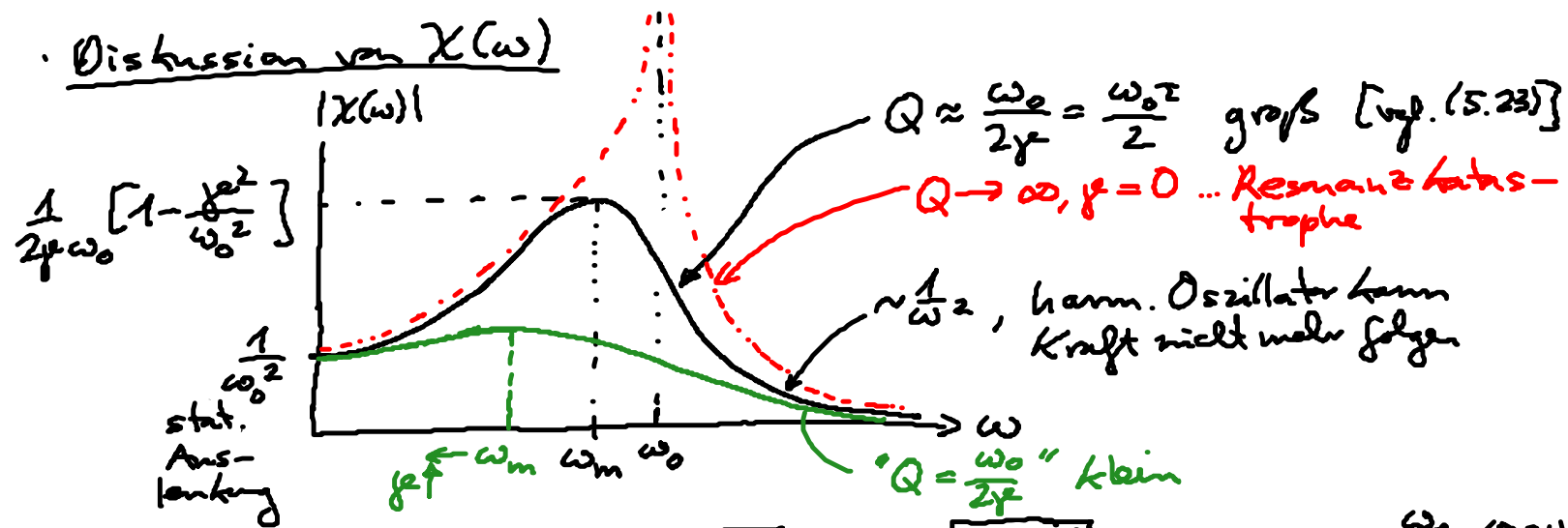
Einschwingvorgang $\rightarrow 0, t \gg \tau = \gamma^{-1}$
 eingeschwungener Zustand
 "Resonanzanregung" (für $\omega \rightarrow \omega_m$ (s. unten))

transientes Verhalten:

$$x_{\text{hom}}(t) \text{ \& } x_{\text{part}}(t)$$

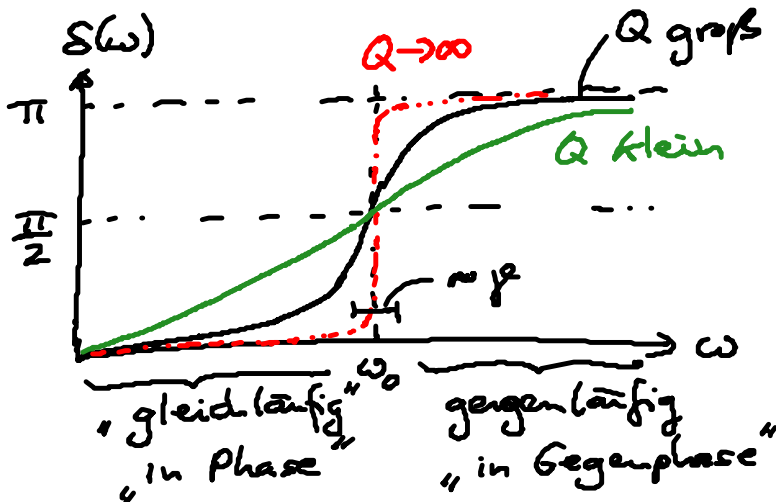
$\hat{=}$ Überlagerung zweier Schwingungen: i.a. $\omega_d \neq \omega$

Diskussion von $\chi(\omega)$



$$\text{Maximum: } \omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0, \quad \gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \quad (5.34)$$

$$\left[(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x\right] \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right), \quad \gamma \rightarrow 0 \quad (5.35)$$



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

• Näherung: $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

$$(5.30) \rightarrow \chi(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)}$$

$$[\omega_0^2 - \omega^2 \approx \underbrace{(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0} \underbrace{(\omega_0 - \omega)}_{\Delta\omega}]$$

... Maximum (Peak) mit Höhe $\sim \frac{1}{\gamma}$, Breite $\sim \gamma$ (5.36)

... Übergangsbereich: Breite $\sim \gamma$

• Leistungsbilanz:

$$(2.25) \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2}_{\text{mechan. Energie } E_{\text{mech}}} \right] = F_{\text{diss}} \dot{x} = \underbrace{-\alpha \dot{x}^2}_{\text{Reibungsverlustleistung}} + \underbrace{F(t) \cdot \dot{x}}_{\text{Leistung der äußeren Kraft}} \quad (5.37)$$

• eingeschwungener Zustand: $x(t) = x_{\text{part}}(t)$

$$\frac{d}{dt} \langle E_{\text{mech}} \rangle = 0 \quad (5.37) \rightarrow \alpha \langle \dot{x}^2 \rangle = \langle F(t) \dot{x} \rangle$$

„Dissipation“ = „Absorption“

$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \dots dt$

gemittelte, dissipierte Energie pro Zeit:

$$\langle N(\omega) \rangle = \frac{\alpha}{2\gamma m} \langle \dot{x}^2 \rangle \stackrel{(5.36)}{=} 2\gamma m \underbrace{|\chi(\omega)|^2}_{-\chi''(\omega)/2\gamma\omega} \frac{F_0^2}{m^2} \omega^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t - \delta(\omega)) \rangle}_{= \frac{1}{2}}$$

[s. (5.33)]

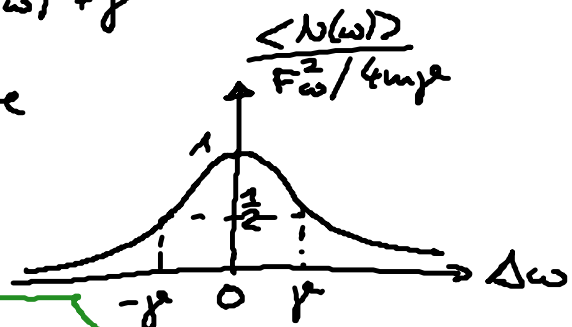
$$\langle N(\omega) \rangle = -\frac{\omega}{2m} F_0^2 \chi''(\omega) \quad (5.28)$$

... absorbierte = dissipierte Leistung ist bestimmt durch $\chi''(\omega)$

• Näherung: $\Delta\omega \ll \omega_0, \gamma \ll \omega_0$:

$$\chi''(\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0} \frac{\gamma^2}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2} \quad (5.36)$$

... Lorentzkurve



(5.38)
 $\omega \approx \omega_0$

$$\langle N(\omega) \rangle \approx \frac{F_\omega^2}{4m\gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2} \quad (5.39)$$

b) Der Formalismus der linearen Antwort I (Methode der Greenschen Fkt.)

• dynamische Eigenschaften eines Systems?
 äußerer Stimulus / erregende Kraft \rightarrow Reaktion / Antwort

Bsp: $A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_\omega}{m}$... „linear“

• Ziel: „allgemeinste lineare Antwort“

• Bsp: harm. Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (5.10)$

beliebige Kraft $\tilde{F}(t)$ $\xrightarrow{\text{„alg. lineare Antwort“}}$

(bzw.: $I(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{F}(t') dt'$)

... Kraftstoß

$$x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \tilde{F}(t') dt'$$

„Faltung“