

d) Der Formalismus der linearen Antwort II

• Es gilt: $\hat{L}(t) G_c(t-t') = \delta(t-t')$, $\hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$ (S.61)
 δ -Kraft, $\int \delta(t-t') dt = 1 \dots$ δ -Kraftstoß

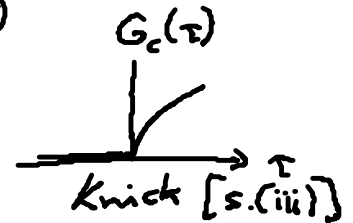
• Bestimmung der Greenschen Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

(i) Kausalität: $G_c(\tau) = 0, \tau < 0$

$$\left[\int_{-\infty}^0 G_c(t-t') \tilde{F}(t') dt' \right]$$

(ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0} = 0, \varepsilon \rightarrow 0$

$$\rightarrow \boxed{G_c(0) = 0}$$



(iii) Sprungbed.:

$$(S.61): \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \left[\underbrace{\ddot{G}_c(\tau)}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} + \underbrace{2\gamma \dot{G}_c(\tau)}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} + \underbrace{\omega_0^2 G_c(\tau)}_{\rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0} - \underbrace{\delta(\tau)}_{=1} \right] = 0$$

$$2\gamma [G_c(\varepsilon) - G_c(-\varepsilon)] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad [s.(ii)]$$

$$\dot{G}_c(\varepsilon) - \underbrace{\dot{G}_c(-\varepsilon)}_{=0 [s.(i)]} = 1$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$$\boxed{\dot{G}_c(+0) = 1}$$



vgl.: S-Kraftstoß: $1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{F}{m} dt \stackrel{F=p'}{=} \frac{1}{m} [p(\varepsilon) - \underbrace{p(-\varepsilon)}_0]$
 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \boxed{1 = v(0) = \dot{x}(0)}$

(iv) $\tau > 0$: $G_c(\tau)$ löst homogene Dgl.!

(i) - (iv) \rightarrow kausale Greensche Fkt.

$$\boxed{G_c(t-t') = \underbrace{\Theta(t-t')}_{(i)} \underbrace{\frac{1}{\omega_d}}_{(iii)} \underbrace{e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_d(t-t')]}_{(ii), (iv): (5.20) \text{ mit } \varphi = \frac{\pi}{2}} \quad (5.62)$$

• Bemerkungen:

(i) S-Kraft: $S(t-t') \stackrel{(5.58)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} d\omega \dots$ kontinuierliche Überlagerung von harm. Kräften der Stärke $\frac{1}{2\pi}$
 \rightarrow Antwort: $\chi(\omega) \frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} (*)$ [vgl. (5.30)]

Linearität der Dgl.
Antwort auf S(t-t')
 $\xrightarrow{\text{Überlagerung} (*)}$

$$\boxed{G_c(t-t') = \int \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \chi(t-t')} \quad (5.63)$$

... Fourier-Integraldarstellung von $G_c(t-t')$

dynamische Suszeptibilität $\chi(\omega) \equiv$

Fourier-Transformierte von $G_c(t-t')$

$$\boxed{G_c(\omega) = \chi(\omega)} \quad (5.64)$$

NB. Berechne (5.63) durch Integration im Komplexen!

Einschub: Fouriertransformation (FT)

vgl. Vektor $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$ mit $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

hier: Basis für $f(t)$?

definiere: Fouriertrafo von $f(t)$.

$$\hat{f}(\omega) \equiv f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

dann gilt: (o.B.)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Faltungssatz der FT:

$$f(\omega) g(\omega) \xrightarrow{FT^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t') dt'$$

(ii) allgemeine Kraft:

$$\hat{x}(t) \cdot x(t) = \hat{F}(t)$$

$$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ = \int x(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \hat{F}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\hat{x}(t) e^{i\omega t} = \chi^{-1}(\omega) e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \int \chi^{-1}(\omega) x(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \hat{F}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\rightarrow \boxed{\chi^{-1}(\omega) x(\omega) = \hat{F}(\omega)} \quad \text{vgl. (S.30)}$$

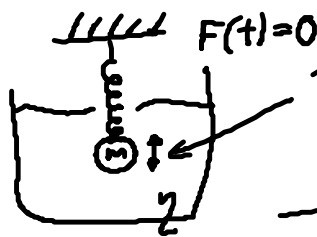
$$\rightarrow x(\omega) = \chi(\omega) \hat{F}(\omega) \quad \begin{array}{l} \text{Faltungssatz} \\ \text{der FT} \end{array}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi(t-t')}_{G_c(t-t')} \hat{F}(t') dt'}$$

vgl. (S.42)

(iii) Ausblick: Fluktuations - Dissipations - Theorem

Experiment:



Zitterbewegung der Kugel aufgrund Remischer Stöße der Flüssigkeitsmoleküle:

mittlere kinetische Energie: $\frac{m}{2} \langle v^2 \rangle_E = \frac{k_B T}{2}$
 + potentielle " " : $\frac{m}{2} \omega_0^2 \langle x^2 \rangle_E = \frac{k_B T}{2}$

wobei $\langle \dots \rangle_E$... Mittel über ein gases Ensemble von ident. Oszillatoren Gleichverteilungssatz der stat. Mechanik

charakterisiere Zitterbewegung durch

$C(t) = \langle x(t)x(0) \rangle_E$... zeitliche Autokorrelations fkt. der Auslenkung $x(t)$

Führe ein $C(\omega) = \int C(t) e^{-i\omega t} dt$

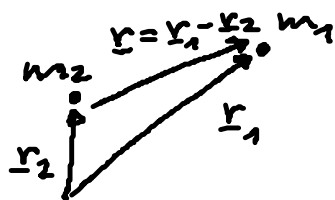
o.B. \rightarrow $C(\omega) = -\frac{2}{m} \frac{k_B T}{\omega} \chi''(\omega)$ (5.65) ... Fluktuationen-Dissipations-Theorem

Fluktuationen Lichtstreuung \leftrightarrow Absorption/Dissipation [s(5.38)] Resonanzexp.

6. Bewegung im Zentralfeld

6.1 Problemstellung


• Geometrie:



Was zwischen m_1 und m_2 : Zentralpotential $U(\underline{r}) = U(r)$

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r$$

... „Zentralkraftfeld“ [vgl. Kap. 2.3]

- Bsp: (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$
 - $m_1 = m_p(\text{Planet})$
 - $m_2 = m_s(\text{Sonne})$
- (ii) Streuung: "
 - Komet an Erde
- (iii) Wasseratom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$
- (iv) Rutherfordstrahlung: $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{r}$
 - α -Teilchen [Kernladungszahl $z_1 = 2$... Heliumkern]
 - gestreut an Goldfolie [$z_2 = 79$]
 - Nachweis: Atom = massiver Atomkern & e^- -Wolke
 - Atomphysik
- (v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$... Schwingung eines 2-atomigen Moleküls 

Gravitationspotential (3.3)

Coulombpotential (3.11)

6.2 Reduktion zum Einteilchen Problem

- Zweiteilchenproblem (→ Kap. 9)
 - (1) $m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\nabla_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$
 - (2) $m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\nabla_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$
- Entkoppeln?
 - „Schwerpts. Koordinate“: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{o.B.}} \left\{ \begin{array}{l} \underline{r}_1 = \underline{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r} \\ \underline{r}_2 = \underline{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r} \end{array} \right. \quad (6.4)$
 - [→ Kap. 8] (6.3)
 - Relativkoordinate:
- Schwerpts. bewegung
 - in (6.2) → (1)+(2): l.S. $\overbrace{(m_1 + m_2)}^M \ddot{\underline{R}}$
 - r.S. $-\nabla_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) - \nabla_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) = 0$
 - $-\nabla_r U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)$

$$\rightarrow \mu \ddot{\underline{R}} = 0 \quad (6.5)$$

$$\rightarrow \underline{R} = \underline{V}t + \underline{b}$$

\rightarrow kräftefreie Bewegung des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

• Relativbewegung:

in (6.2): $\frac{1}{m_1} (1) - \frac{1}{m_2} (2) \rightarrow \underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1} \underbrace{\nabla_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{\nabla_{\underline{r}} U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2} \underbrace{\nabla_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{-\nabla_{\underline{r}} U(|\underline{r}|)}$

$$= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \nabla U(r)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$\rightarrow \boxed{\mu \ddot{\underline{r}} = -\nabla U(r)} \quad (6.6)$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dots$ reduzierte Masse (6.7)

... effektives Teilchen im Zentralpotential

\rightarrow Energieerhaltung [Kap. 2.4] $\left. \begin{array}{l} \rightarrow$ konsev. Kraftfeld \\ \end{array} \right\} 4 Konstante der Bewegung

\rightarrow Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3]

Bsp: $m_1 = m_p \ll m_2 = m_s \rightarrow \mu = \frac{m_p m_s}{m_s} = m_p !!!$