d) Der Formalismus der linearen Antwort II

· Es galt: $\hat{L}(t)\, G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta\text{-Kraft}}$, $\hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2$ (5.61)

δ-Kraft, $\int \delta(t-t')\, dt = 1 \ldots$ δ-Kraftstoß

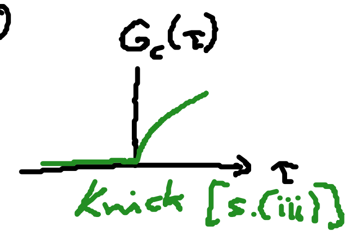
· Bestimmung der Greenschen Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

(i) Kausalität: $\boxed{G_c(\tau) = 0 \,, \tau < 0}$

$\left[\int_{-\infty}^{\infty} G_c(t-t')\, F(t')\, dt' \;!! \right]$

(ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0} = 0 \,, \quad \varepsilon \to 0$

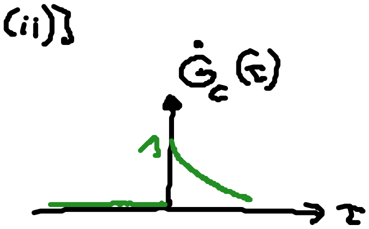
$\longrightarrow \quad \boxed{G_c(0) = 0}$



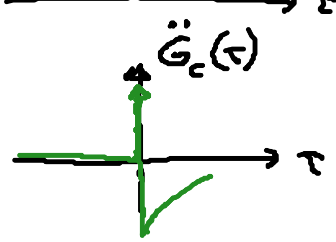
(iii) Sprungbed.:

(5.61): $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\tau \Big[\underbrace{\ddot{G}_c(\tau)} + \underbrace{2\gamma\, \dot{G}_c(\tau)}_{2\gamma[G_c(\varepsilon) - G_c(-\varepsilon)] \,\to\, 0,\ \varepsilon \to 0} + \underbrace{\omega_0^2 G_c(\tau)}_{\to 0,\ \varepsilon \to 0\ [s.(ii)]} - \underbrace{\delta(\tau)}_{=1} \Big] = 0$

$\longrightarrow \dot{G}_c(\varepsilon) - \underbrace{\dot{G}_c(-\varepsilon)}_{=0\ [s.(i)]} = 1$



$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \quad \boxed{\dot{G}_c(+0) = 1} \quad \longrightarrow$



vgl.: δ-Kraftstoß: $1 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\frac{F}{m}}_{\delta(\tau)} d\tau \overset{F=\dot{p}}{=} \frac{1}{m}\left[p(\varepsilon) - \underbrace{p(-\varepsilon)}_{0}\right] \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \boxed{1 = v(0) = \dot{x}(0)}$

(iv) $\tau > 0$: $G_c(\tau)$ löst homogene Dgl.!

(i) – (iv) $\longrightarrow$ kausale Greensche Fkt.

$$\boxed{G_c(t-t') = \underbrace{\Theta(t-t')}_{(i)} \underbrace{\frac{1}{\omega_d}}_{(iii)} \underbrace{e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_d(t-t')]}_{(ii),\,(iv):\ (5.20)\text{ mit } \varphi = \frac{\pi}{2}}} \quad (5.62)$$

• Bemerkungen:

(i) δ-Kraft: $\delta(t-t') \underset{(5.56)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-t')}}_{\to \text{ Antwort: } \chi(\omega)\frac{1}{2\pi}e^{i\omega(t-t')}\ (*)} d\omega$ ... kontinuierliche Überlagerung von harm. Kräften der Stärke $\frac{1}{2\pi}$ [vgl. (5.30)]

Linearität der DGl: $\xrightarrow[\text{Überlagerung }(*)]{\text{Antwort auf } \delta(t-t')}$

$$\boxed{G_c(t-t') = \int \chi(\omega) e^{i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv \chi(t-t')} \quad (5.63)$$

... Fourier-Integraldarstellung von $G_c(t-t')$

dynamische Suszeptibilität $\chi(\omega) \equiv$ Fourier-Transformierte von $G_c(t-t')$

$$\boxed{G_c(\omega) = \chi(\omega)} \quad (5.64)$$

NB. Berechne (5.63) durch Integration im Komplexen!

Einschub: Fouriertransformation (FT)

vgl. Vektor $\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i$ mit $a_i = \underline{e}_i \cdot \underline{a}$, $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

hier: Basis für $f(t)$?

definiere: Fouriertrafo von $f(t)$:

$$\hat{f}(\omega) \equiv f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

dann gilt: (o.B.)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Faltungssatz der FT:

$$f(\omega)\, g(\omega) \xrightarrow{FT^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')\, g(t')\, dt'$$

(ii) allgemeine Kraft:

$$\hat{L}(t)\, x(t) = \tilde{F}(t)$$

$$x(t) = \int x(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \qquad \tilde{F}(t) = \int \tilde{F}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\hat{L}(t)\, e^{i\omega t} = \chi^{-1}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \int \chi^{-1}(\omega)\, x(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int \tilde{F}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

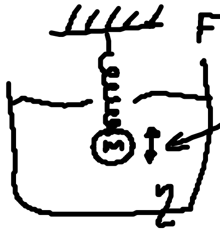
$$\longrightarrow \boxed{\chi^{-1}(\omega)\, x(\omega) = \tilde{F}(\omega)}$$ vgl. (5.30)

$$\longrightarrow \quad x(\omega) = \chi(\omega)\, \tilde{F}(\omega) \xrightarrow[\text{der FT}]{\text{Faltungssatz}} \boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi(t-t')}_{G_c(t-t')}\, \tilde{F}(t')\, dt'}$$

vgl. (5.42)

(iii) Ausblick: Fluktuations - Dissipations - Theorem

Experiment:



Zitterbewegung der Kugel aufgrund thermischer Stöße der Flüssigkeitsmoleküle:

$\longrightarrow$ mittlere kinetische Energie: $\frac{m}{2}\langle v^2\rangle_E = \frac{k_B T}{2}$

$+$ potentielle ": $\underbrace{\frac{m}{2}\omega_0^2\langle x^2\rangle_E = \frac{k_B T}{2}}_{\text{Gleichverteilungssatz der stat. Mechanik}}$

wobei $\langle \dots \rangle_E$ ... Mittel über ein ganzes Ensemble von ident. Oszillatoren

charakterisiere Zitterbewegung durch

$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle_E$ ... „zeitliche Autokorrelationsfkt. der Auslenkung $x(t)$"

Führe ein $C(\omega) = \int C(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$

(5.65)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \boxed{\underbrace{C(\omega)}_{\substack{\text{Fluktuationen} \\ \text{Lichtstreuexp.}}} = -\frac{2}{m}\frac{k_B T}{\omega}\underbrace{\chi''(\omega)}_{\substack{\text{Absorption/} \\ \text{Dissipation} \\ \text{Resonanzexp.}}}}$$

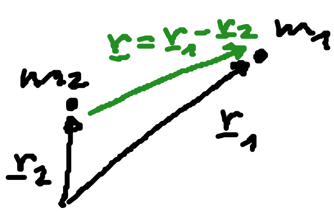
... Fluktuations-Dissipations-theorem

Fluktuationen $\longleftrightarrow$ Absorption/Dissipation [s(5.38)]

6. Bewegung im Zentralfeld

6.1 Problemstellung

- Geometrie:



Ww zwischen m_1 und m_2: Zentralpotential $U(\underline{r}) = U(r)$

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{\nabla} r = -\frac{\partial U}{\partial r}\underline{e}_r$$

... „Zentralkraftfeld" [vgl. Kap. 2.3]

• **Bsp:** (i) Keplerproblem: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

$m_1 = m_{p(\text{lanet})}$

$m_2 = m_{S(\text{onne})}$

(ii) Streuung: "

Komet an Erde

} Gravitations-potential (3.3)

(iii) Wasseratom: $U(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$

(iv) Rutherfordstreuung:

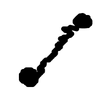
$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

} Coulombpotential (3.11)

α-Teilchen [Kernladungszahl $Z_1 = 2$ ... Heliumkern]
gestreut an Goldfolie [$Z_2 = 79$]

$\longrightarrow$ Nachweis: Atom = massiver Atomkern & e^--Wolke

$\longrightarrow$ Atomphysik

(v) Oszillator: $U(r) = \frac{1}{2} f r^2$ ... Schwingung eines 2-atomigen Moleküls 

6.2 Reduktion zum Einteilchen Problem

• Zweiteilchenproblem ($\longrightarrow$ Kap. 9)

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ (2)\quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned}\right\} (6.2)$$

• Entkoppeln?

• „Schwerpkts. koordinate": [$\longrightarrow$ Kap. 8]

Relativkoordinate:

$$(6.3)\left\{\begin{aligned} \underline{R} &= \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \underline{r} &= \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ü.B.}} \left\{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2} \underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2} \underline{r} \end{aligned}\right. (6.4)$$

• Schwerpkts. bewegung in (6.2) $\longrightarrow$ (1)+(2): l.S. $\overbrace{(m_1+m_2)}^{M} \ddot{\underline{R}}$

r.S. $-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) - \underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)} = 0$

$$\longrightarrow M\ddot{\underline{R}} = 0$$

$$\longrightarrow \underline{R} = \underline{V}t + \underline{b} \qquad (6.5)$$

$\longrightarrow$ kräftefreie Bewegungs des Gesamtsystems mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$

- <u>Relativbewegung</u>:

in (6.2), $\frac{1}{m_1}(1) - \frac{1}{m_2}(2) \longrightarrow$

$$\underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1}\underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{\underline{\nabla}_{\underline{r}} U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2}\underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{-\underbrace{\underline{\nabla}_{\underline{r}}}_{\underline{\nabla}}(\underbrace{|\underline{r}|}_{r})}$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \underline{\nabla} U(r)$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\mu \ddot{\underline{r}} = -\underline{\nabla} U(r) && (6.6) \\ &\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \;\ldots\; \text{reduzierte Masse} && (6.7) \end{aligned}}$$

... effektives Teilchen im Zentralpotential ($\longrightarrow$ konserv. Kraftfeld)

$\longrightarrow$ Energieerhaltung [Kap. 2.4]
$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3]
} 4 Konstanten der Bewegung

Bsp: $m_1 = m_p \ll m_2 = m_S \longrightarrow \mu = \frac{m_p m_S}{m_S} = m_p$!!!