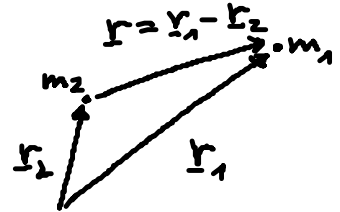


6. Bewegung im Zentralpotential

6.2 Reduktion zum Einteilchenproblem

• Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\underline{r}} = -\nabla U(r) \quad (6.6)$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.7) \quad \dots \text{reduzierte Masse}$$



... effektives Teilchen im Zentralpotential

→ Energieerhaltung } 4 Konstanten der Bewegung
→ Drehimpulserhaltung }

Bsp: $m_1 = m_p \ll m_2 = m_s \rightarrow \mu \approx m_p!!$

6.3 Lösung des Einteilchen-Problems

a) Auswertung der Erhaltungssätze:

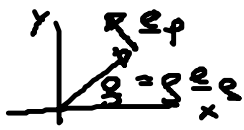
• Drehimpuls :
[vgl. Kap. 2.3]

$$\underline{r} \times (6.6) \rightarrow \underline{r} \times \mu \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} (\underbrace{\underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}}}_{\underline{L}}) - \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \mu \dot{\underline{r}}}_{=0}$$
$$= -\underline{r} \times \underbrace{\nabla U(r)}_{\sim \underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \text{const.} = L \underline{e}_z \quad (6.8)$$

↑
o. B. d. A.

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \rightarrow$ Bewegung in xy -Ebene:
 $\underline{r} = \rho = \rho \underline{e}_\rho \dots$ Zylinderkoord.



$$\rightarrow \dot{\underline{r}} = (\dot{\rho} \underline{e}_\rho) = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \underline{e}_\phi = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \underline{e}_\phi \quad (6.9)$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \mu \rho \dot{\phi} \underbrace{\underline{r} \times \underline{e}_\phi}_{\rho \underline{e}_z}$$

$$\rightarrow \boxed{\underline{L} = L \underline{e}_z \text{ mit } L = \mu \rho^2 \dot{\phi}} \quad (6.10)$$

• Energie: $\dot{\underline{r}} \cdot (6.6) \xrightarrow{\text{Kap. 2.4}} \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E \quad (6.11)$

mit $\dot{\underline{r}}^2 \stackrel{(6.9)}{=} \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \stackrel{(6.10)}{=} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}$

$$(6.11) \xrightarrow{r=\rho} \boxed{\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = E} \quad (6.12)$$

kinet. Energie: radial azimuthal

\rightarrow Umdeutung:
 eindim. Bewegung
 mit Koord. ρ in
 $U_{\text{eff}}(\rho)$

$$\boxed{\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = E} \quad (6.13)$$

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$$

„Zentrifugalpotential“:
 abstoßend,
 $\rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$

Bewgl. zu (6.13)

$$\frac{d}{dt} (6.13) / \dot{\rho} \rightarrow \boxed{\mu \ddot{\rho} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} = \frac{L^2}{\mu \rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho}} \quad (6.14)$$

„Zentrifugalkraft“
 = Scheinkraft, treibt
 Körper weg vom Zentrum
 (vgl. Karussell)

b) Lösung:

• folgt aus:

$$(6.10) \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (6.15)$$

$$(6.13) \longrightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (6.16)$$

• Integration von (6.16): $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ & Separation der Variablen

$$t - t_0 = \int_{r_0 = r(t_0)}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r')]}} \longrightarrow r(t) \quad (6.17)$$

$r(t)$ in (6.15) $\longrightarrow \varphi(t)$

• Gestalt der Bahnkurve: $\left. \begin{array}{l} r(t) \\ \varphi(t) \end{array} \right\} \longrightarrow r = r(\varphi)$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow{\text{Integration}} \frac{d\varphi = \dots dr}{dr}$$

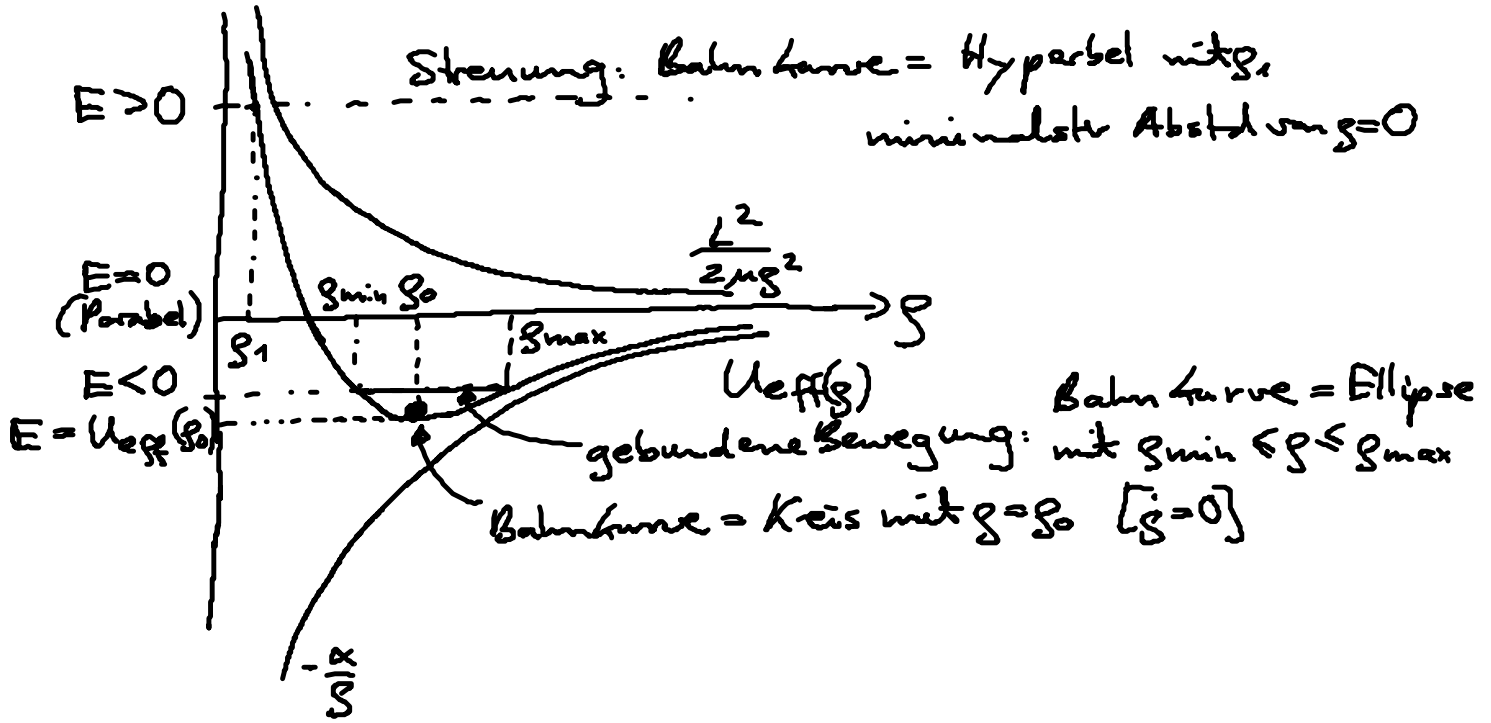
$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L/r'^2}{\sqrt{2\mu [E - U_{\text{eff}}(r')]} dr' \longrightarrow r(\varphi) \quad (6.18)$$

c) Qualitative Diskussion:

für Keplerproblem [s. Kap. 6.4]

Radialbewegung mit $U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

$U_{\text{eff}}(r)$



6.4. Das Kepler problem

• Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $\alpha = \begin{cases} \mu m_1 m_2 & \dots \text{ Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} & \dots \text{ Coulombpotential} \end{cases}$

$\alpha > 0$... anziehendes Potential
 (< 0 ... abstoßendes ")

a) Lösung und Diskussion

• Bahnkurve: (6.18), $\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi = \int \frac{L/l^2}{\sqrt{2\mu[E + \frac{\alpha}{s} - \frac{L^2}{2\mu s^2}]}} ds$
 $- U_{\text{eff}}(s)$

Stammfkt:

$u = \frac{1}{s}, du = -\frac{ds}{s^2}$
 $a = \frac{2\mu E}{L^2}, b = \frac{\mu \alpha}{L^2}$

$\varphi = - \int \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - u^2}} = \arccos \frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}} + \pi$
 o.B. o.A.

$\rightarrow \varphi - \pi = \arccos \left[\frac{\frac{\mu \alpha}{L^2} - \frac{1}{s}}{\sqrt{\frac{\mu^2 \alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \right]$ (6.19)

• Führe ein:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu \kappa} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \kappa^2}} \end{array} \right\} (6.19) \longrightarrow \boxed{g = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (6.21)$$

... "Kegelschnitt" in Polar Coord.

• mögliche Bahnkurven:

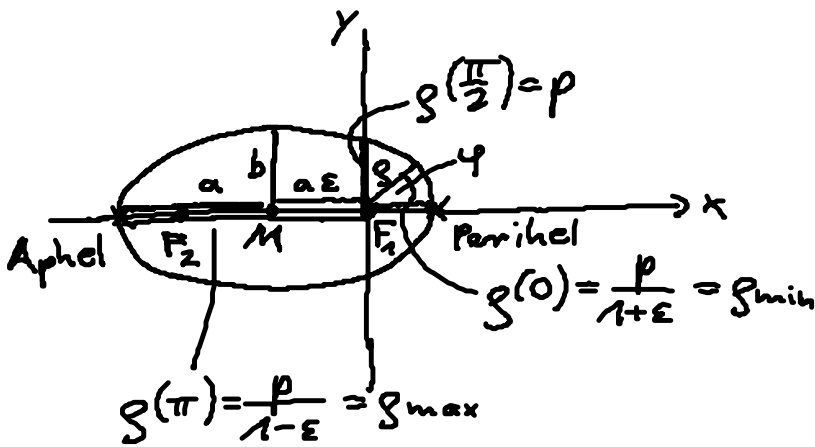
(1) $\boxed{\varepsilon = 0, E = -\frac{\mu \kappa^2}{2L^2}}$... Kreis: $g = p$

(2) $\boxed{\varepsilon < 1, E < 0}$... Ellipse

Kartes. mit $g = \sqrt{x^2 + y^2}$ } (6.21) $\left. \begin{array}{l} \text{Koord. } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \text{ o.B.}$

$$\boxed{\frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (6.22)$$

Halbachsen:
 $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$



F_1 ... Brennpkte.

F_1 ... Sonne!

M ... Mittelpunkt

$a\varepsilon = |MF_1| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$

ε bestimmt Abweichung vom Kreis $\hat{=}$ Exzentrizität

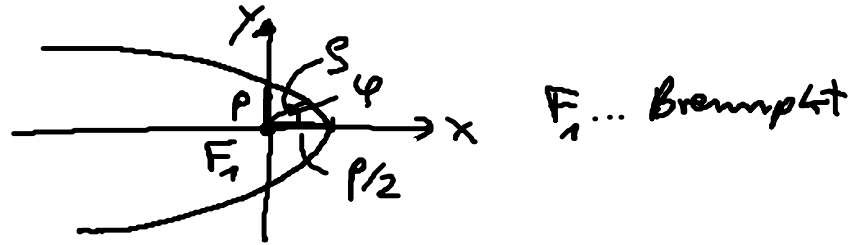
Perihel: sonnennächster Pkt.

Aphel: " fernste "

(3) $\boxed{\varepsilon = 1, E = 0}$... Parabel

Kartes. Koord: $g = \sqrt{x^2 + y^2}$ } (6.21) $\left. \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \text{ o.B.}$

$$x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2} \quad (6.23)$$



„ Bahn eines Massekörpers, der tangential von Erdoberfläche abgeschossen wird und gerade dem Grav. feld entkommt.

$$[v_p = \sqrt{2gR} \quad (4.13)]$$