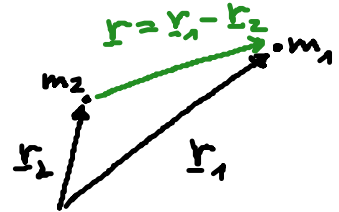


6. Bewegung im Zentralpotential

6.2 Reduktion zum Einteilchenproblem

• Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\underline{r}} = -\nabla U(r) \quad (6.6)$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.7) \quad \dots \text{reduzierte Masse}$$



... effektives Teilchen im Zentralpotential

- Energieerhaltung
 - Drehimpulserhaltung
- } 4 Konstanten der Bewegung

Bsp: $m_1 = m_p \ll m_2 = m_s \rightarrow \mu \approx m_p!!$

6.3 Lösung des Einteilchen-Problems

a) Auswertung der Erhaltungssätze:

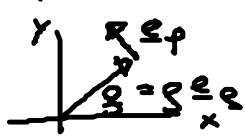
• Drehimpuls:
[vgl. Kap. 2.3]

$$\underline{r} \times (6.6) \rightarrow \underline{r} \times \mu \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} (\underbrace{\underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}}}_{\underline{L}}) - \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \mu \dot{\underline{r}}}_{=0}$$
$$= -\underline{r} \times \underbrace{\nabla U(r)}_{\sim \underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \text{const.} = L \underline{e}_z \quad (6.8)$$

↑
o. B. d. A.

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \rightarrow$ Bewegung in xy -Ebene:



$\underline{r} = \rho = \rho \underline{e}_\rho \dots$ Zylinder kond.

$$\rightarrow \dot{\underline{r}} = (\dot{\rho} \underline{e}_\rho) = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\underline{e}}_\rho = \dot{\rho} \underline{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (6.9)$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \mu \rho \dot{\varphi} \underbrace{\underline{e}_\rho \times \underline{e}_\varphi}_{\underline{e}_z}$$

$$\rightarrow \underline{L} = L \underline{e}_z \text{ mit } L = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \quad (6.10)$$

• Energie: $\dot{\underline{r}} \cdot (6.9) \xrightarrow{\text{Kap. 2.4}} \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E \quad (6.11)$

mit $\dot{\underline{r}}^2 \stackrel{(6.9)}{=} \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \stackrel{(6.10)}{=} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 \rho^2}$

$$(6.11) \xrightarrow{r=\rho} \underbrace{\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2}_{\text{radial}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2}}_{\text{azimutal}} + U(\rho) = E \quad (6.12)$$

kinet. Energie: radial azimutal

\rightarrow Umdeutung:
eindim. Bewegung
mit Koord. ρ in
 $U_{\text{eff}}(\rho)$

$$\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = E \quad (6.13)$$

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$$

„Zentrifugalpotential“:
abstoßend,
 $\rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$

Bewgl. zu (6.13)

$$\frac{d}{dt} (6.13) / \dot{\rho} \rightarrow \mu \ddot{\rho} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} = \frac{L^2}{\mu \rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (6.14)$$

„Zentrifugalkraft“
= Scheinkraft, treibt
Körper weg vom Zentrum
(vgl. Karussell)

b) Lösung:

• folgt aus:

$$(6.10) \longrightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (6.15)$$

$$(6.13) \longrightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (6.16)$$

• Integration von (6.16): $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ & Separation der Variablen

$$t - t_0 = \int_{r_0=r(t_0)}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r')]}} \longrightarrow r(t) \quad (6.17)$$

$$r(t) \text{ in (6.15)} \longrightarrow \varphi(t)$$

• Gestalt der Bahnkurve: $\left. \begin{array}{l} r(t) \\ \varphi(t) \end{array} \right\} \longrightarrow r = r(\varphi)$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow{\text{Integration}} \frac{d\varphi = \dots dr}{dr}$$

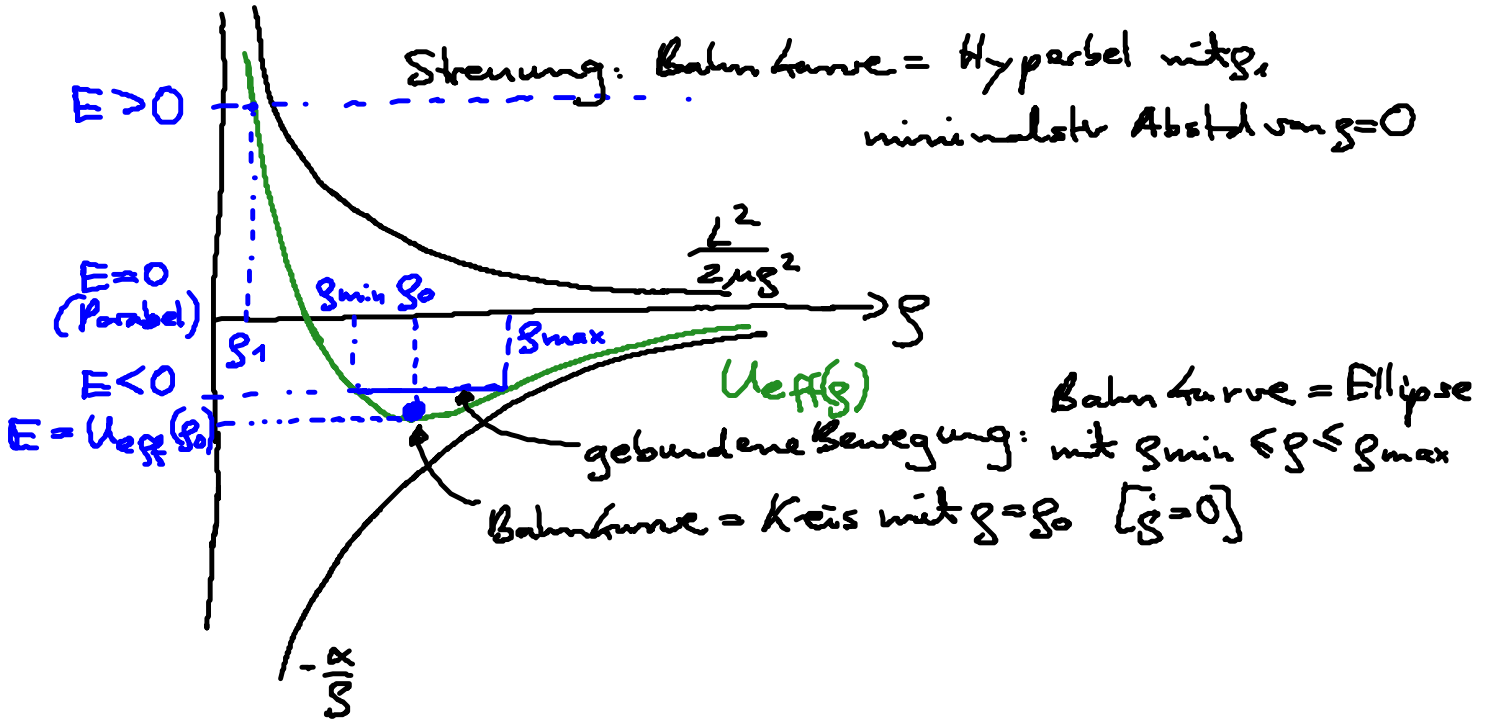
$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L/r'^2}{\sqrt{2\mu [E - U_{\text{eff}}(r')]} dr' \longrightarrow r(\varphi) \quad (6.18)$$

c) Qualitative Diskussion:

für Keplerproblem [s. Kap. 6.4]

Radialbewegung mit $U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$

$U_{\text{eff}}(r)$



6.4. Das Kepler problem

• Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $\alpha = \begin{cases} \mu m_1 m_2 & \dots \text{ Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} & \dots \text{ Coulombpotential} \end{cases}$

$\alpha > 0$... anziehendes Potential
(< 0 ... abstoßendes ")

a) Lösung und Diskussion

• Bahnkurve: (6.18), $\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi = \int \frac{L/l^2}{\sqrt{2\mu[E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2}]}} d\rho$
 $- U_{\text{eff}}(\rho)$

Stammfkt:

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{1}{\rho}, \quad du = -\frac{d\rho}{\rho^2} \\ a = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad b = \frac{\mu\alpha}{L^2} \end{aligned} \right\} \varphi = - \int \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - u^2}} = \arccos \frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}} + \pi$$

o.B.
d.A.

$$\rightarrow \varphi - \pi = \arccos \left[\frac{\frac{\mu\alpha}{L^2} - \frac{1}{\rho}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \right] \quad (6.19)$$

• Führe ein:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu \alpha} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (6.20) \\ (6.19) \end{array}$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (6.21)$$

... "Kegelschnitt" in Polar Coord.

• mögliche Bahnkurven:

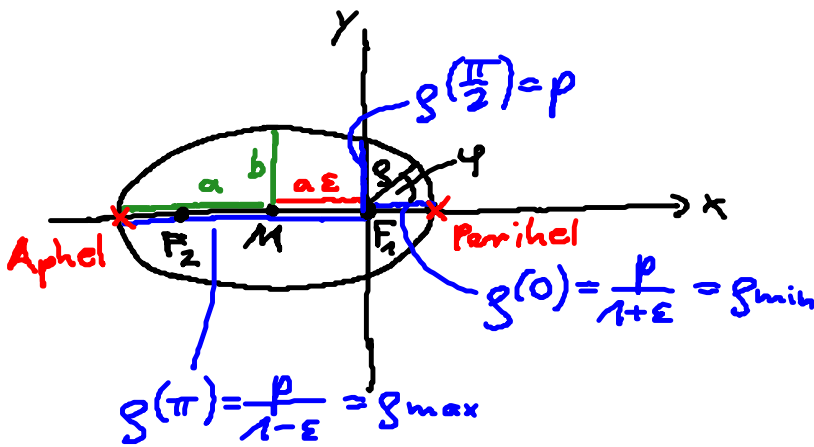
(1) $\varepsilon = 0, E = -\frac{\mu \alpha^2}{2L^2}$... Kreis: $r = p$

(2) $\varepsilon < 1, E < 0$... Ellipse

Kartes. Koord. mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ } (6.21)
 $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ } o.B.

$$\boxed{\frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (6.22)$$

Halbachsen:
 $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$



F_1 ... Brennpkte.

F_1 ... Sonne!

M ... Mittelpunkt

$a\varepsilon = |MF_1| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$

ε bestimmt Abweichung vom Kreis $\hat{=}$ Exzentrizität

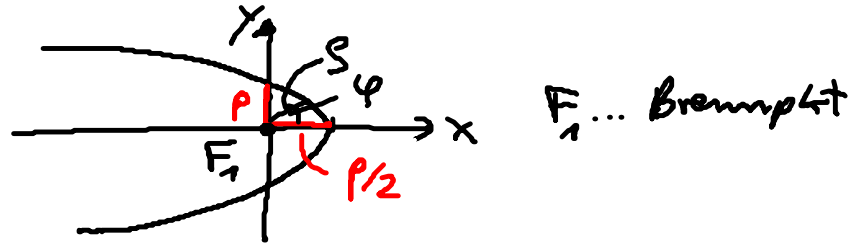
Perihel: sonnennächster Pkt.

Aphel: " fernste "

(3) $\varepsilon = 1, E = 0$... Parabel

Kartes. Koord.: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ } (6.21)
 $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ } o.B.

$$x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2} \quad (6.23)$$



„ Bahn eines Massekörpers, der tangential von Erdoberfläche abgeschossen wird und gerade dem Grav. feld entkommt.

$$[v_\varphi = \sqrt{2gR} \quad (4.13)]$$