

Parameter: $p = \frac{L^2}{\mu \kappa}$
 Exzentrizität: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \kappa^2}}$

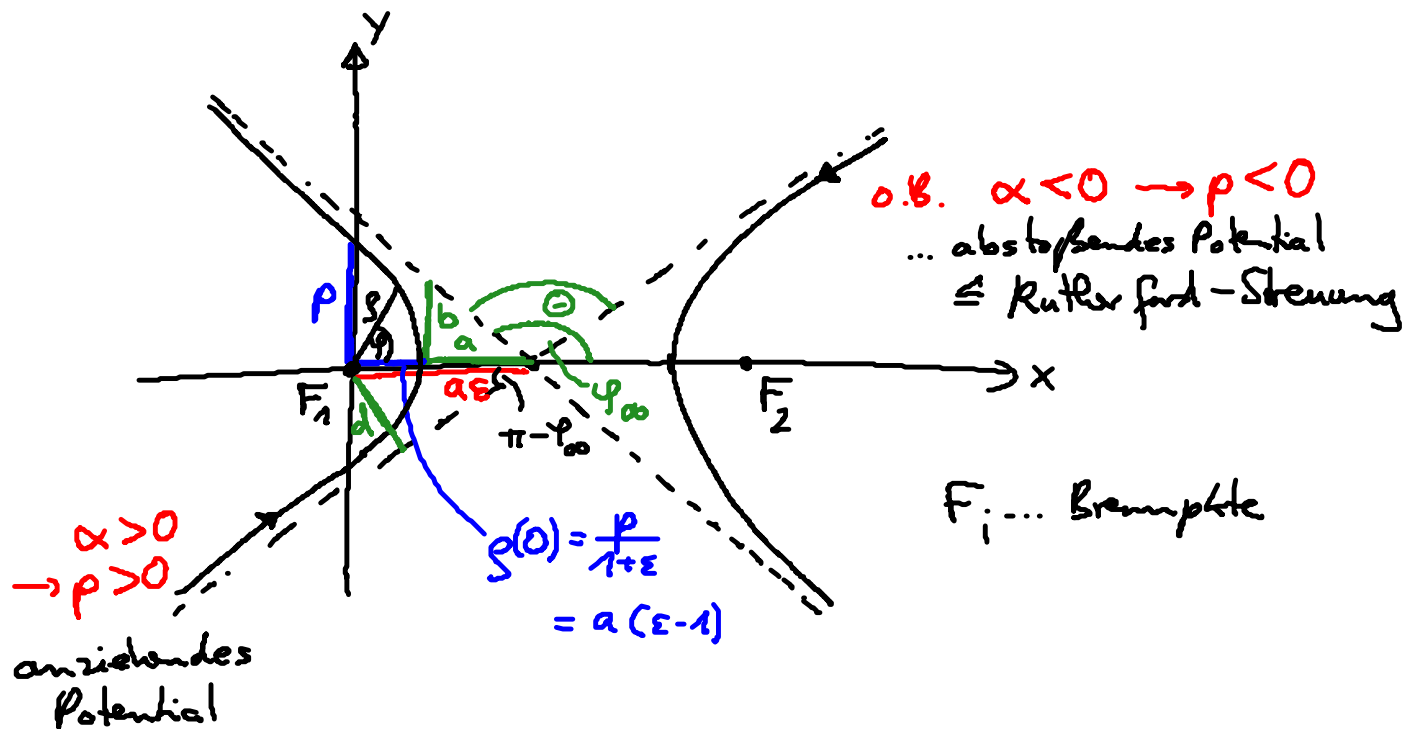
$S = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ (6.21)

... Kegelschnitt

(4) $\varepsilon > 1, E > 0$... Hyperbel, "Streuung" eines Kometen an der Erde/Sonne

$\left. \begin{aligned} S &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (6.21) \\ \text{o.B.} \end{aligned} \rightarrow \frac{(x - a\varepsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.24)$

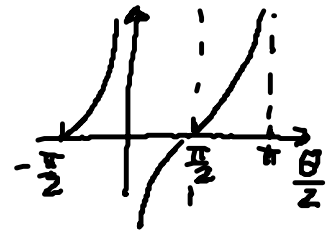
"Halbachsen": $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$



Streuung:

Asymptoten: $\varphi \rightarrow \infty \rightarrow \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon}$ (vgl. (6.21))

Ablenkungs-/Streuwinkel: $\Theta = \pi - 2(\pi - \varphi_\infty) = 2\varphi_\infty - \pi$



Stoßparameter: d

$d(\Theta)$?

$$d = a \epsilon \sin(\pi - \varphi_\infty) = -\frac{1}{\cos \varphi_\infty} - a \tan \varphi_\infty = -a \tan\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a \cot \frac{\Theta}{2}$$

mit $a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}$

$$d(\Theta) = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2} \quad (6.25)$$

b) Keplersche Gesetze:

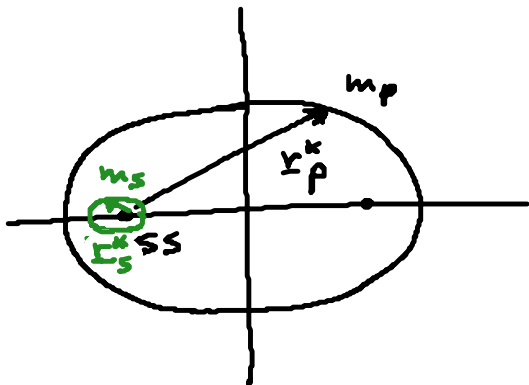
- $m_2 = m_s \dots$ Sonne
- $m_1 = m_p \dots$ Planet

(6.4)

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_s = \underline{R} - \frac{m_p}{M} \underline{r} \xrightarrow{SS} \underline{r}_s^* = -\frac{m_p}{M} \underline{r}$$

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_p = \underline{R} + \frac{m_s}{M} \underline{r} \xrightarrow{SS} \underline{r}_p^* = \frac{m_s}{M} \underline{r}$$

Schwerpt.
system



$$\frac{m_{\text{Jupiter}}}{m_s} \approx 10^{-3}$$

$$\frac{m_{\text{Mond}}}{m_{\text{Erde}}} \approx \frac{1}{81}$$

• Keplersche Gesetze: ($m_p \ll m_s \rightarrow \underline{r}_s^* = 0, \underline{r}_p^* = \underline{r}$)

- Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpkt. die Sonne steht.
- Flächensatz (Drehimpulserhaltung): Kap. 2.3
Der Fahrstuhl überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächen
- Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsen (a) der Planetenbahn: $T^2 = c a^3$

(6.26)

Beweis zu 3.:

Fläche Ellipse: $A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt \stackrel{(2.10)}{=} \frac{L}{2\mu} \int_0^T dt = \frac{L}{2\mu} T \stackrel{!}{=} \pi a b$

aus (6.22) $b = \sqrt{ap} = \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}} L$
(6.20)
 $\mu = \frac{L^2}{\mu a}$

$\rightarrow T^2 = ca^3$ mit $c = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{\mu m_1 m_2}$

$\rightarrow C = \frac{4\pi^2}{\mu(m_s + m_p)} \stackrel{!}{\approx} \frac{4\pi^2}{\mu m_s}$ (6.27)

... nur näherungsweise gültig für alle Planeten

c) Bemerkungen

- Zentralpotential: - geschlossene Bahnen für $E < 0$: $U \sim \frac{1}{r}$, $\sim r^2$ o.B. !!
- sonst: z.B. "Periheldrehung"



Bsp1: Planetenbahnen um Sonne

- Störungen:
1. Grav. Kräfte untereinander
 2. Rel. Effekte

$$U_{\text{eff}} = \underbrace{-\mu \frac{mM}{r}}_{\text{Grav. pot.}} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrif. pot.}}$$

(6.28)

$$-\mu \frac{ML^2}{mc^2} \frac{1}{r^3}$$

von ART

Abweichung von $\frac{1}{r}$

3. Abplattung der Sonne ("Quadrupolmoment")

Merkur: $\frac{\Delta\varphi}{\text{Jahr}} \approx 57,121'' = 90\% (1.) + 10\% (2.)$
 Bogensekunden

NB: (6.28) gilt auch für Photonen ohne $-\frac{mM}{r}$!

Bsp 2: Satelliten um Erde: $\approx 100\%$ durch Abplattung der Erde

E modul zu 2-Körperproblem:

- Planetensystem = Vielkörperproblem \rightarrow chaotisches Verhalten (Buch Arnold)
 $[\Delta x_0(t=0) = \varepsilon \rightarrow \Delta x(t) \sim e^{\lambda t}]$
- Lenzscher Vektor \underline{M} : weitere Konstante der Bewegung für $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\underline{M} = \mu (\underline{\dot{r}} \times \underline{r}) \times \underline{\dot{r}} - \alpha \frac{\underline{r}}{r}, \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = 0 \quad (6.29)$$

7. Nichtinertial systeme

- Inertialsysteme (IS): \underline{r} , Newton: $m \underline{\ddot{r}} = \underline{F}$ (7.1)
physikal. Gesamtkraft

Kap. 1.4: IS \rightarrow IS': $\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \rightarrow \underline{\ddot{r}}' = \underline{\ddot{r}} !!$

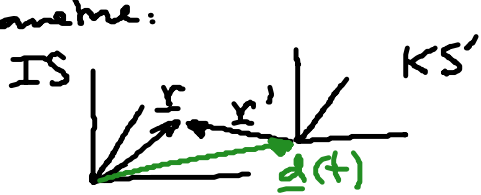
- Nichtinertialsysteme: (KS'): \underline{r}' , $\underline{\ddot{r}}' + \underline{b}_0 = \underline{\ddot{r}}$ (7.2)
Beschl. von KS' relativ zu IS

Bewgl.? (7.2) in (7.1): $m \underline{\ddot{r}}' + m \underline{b}_0 = \underline{F}'$
physikal. Gesamtkraft in KS'

\rightarrow $m \underline{\ddot{r}}' = \underline{F}' + \underline{F}'_s, \quad \underline{F}'_s = -m \underline{b}_0 \dots$ Scheinkraft (7.3)
 ... „Newton mit Scheinkraft“

7.1 Linear beschleunigte BS

• Geometrie:



$$\underline{d}(t) = \frac{t^2}{2} \underline{b}_0$$

$$\text{denn: } \underline{r}' + \underline{d}(t) = \underline{r} \rightarrow \ddot{\underline{r}}' + \underline{b}_0 = \ddot{\underline{r}}$$

• Bsp: 1. ruhender Körper ($\ddot{\underline{r}}' = 0$) in KS': freifallender Fahrstuhl: $\underline{b}_0 = \underline{g}$

$$(7.3) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{F}' = m\underline{g} \dots \text{ Gewichtskraft} \\ \underline{F}'_s = -m\underline{g} \dots \end{array} \right\} \leftrightarrow \ddot{\underline{r}}' = 0!$$

2. Fahrer im bremsenden Auto (\underline{b}_0), ohne Gurt: $\underline{F}' = 0$

$$(7.3) \rightarrow m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F}'_s = -m \underline{b}_0 \rightarrow \text{„Windschubseife“}$$