3. Keplersches Gesetz:

$$T^2 = c\,a^3 , \qquad c = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_s + m_p)}$$

a... große Halbachse der Ellipse für Relativbewegung

→ bezogen auf SS: $a_s = \frac{m_p}{M} a$

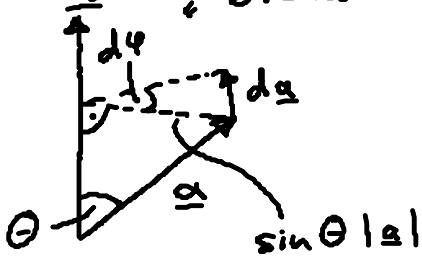
$a_p = \frac{m_s}{M} a$

# 7. Nichtinertialsysteme

## 7.2. Rotierende BS

a) Winkelgeschwindigkeit:

• Def: $\underline{\omega}$ „Drehachse"




$$\underline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\,\underline{e}_\omega \quad (7.4) \qquad |\underline{e}_\omega| = 1$$

... Winkelgeschw.

• bel. Vektor:

$$\left.\begin{array}{l} d\underline{a} \perp \underline{a}, \underline{\omega} \\ |d\underline{a}| = \sin\Theta\,|\underline{a}|\,d\varphi \end{array}\right\} \quad d\underline{a} = \underbrace{d\varphi\,\underline{e}_\omega}_{\underline{\omega}\,dt} \times \underline{a} \xrightarrow{\frac{1}{dt}} \boxed{\frac{d\underline{a}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{a}} \quad (7.5)$$

• Bsp: $\underline{a} = \underline{r}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}}$ (7.6)

· Bemerkungen:

(i) polare Vektoren $\underline{a}, \frac{d\underline{a}}{dt}$ $\xrightarrow{(7.5)}$ $\underline{\omega}$ ... Pseudovektor

[→ $-\underline{a}, -\frac{d\underline{a}}{dt}$ bei Pkt. spiegelung am Ursprung] → $\underline{\omega}$ bei Pkt. spiegelung

(ii) $\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_1$ [s. (7.5)]

(iii) Drehungen $\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi})$ $\quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}$

(1) $\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}_1)\, \underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}_2) \neq D(\underline{\varphi}_2)\, D(\underline{\varphi}_1)$

(2) $\underline{\varphi} = d\underline{\varphi}$ mit $|d\underline{\varphi}| \ll 1$

$$\underline{\underline{D}}(d\underline{\varphi})\, \underline{a} = \underline{a} + d\underline{a} \underset{(7.5)}{=} (\underline{\underline{1}} + d\underline{\varphi}\times)\, \underline{a}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\underline{D}}(d\underline{\varphi}) \approx \underline{\underline{1}} + d\underline{\varphi}\times} \quad (7.7)$$

NB: $(d\underline{\varphi}\times)_{ik} = \varepsilon_{ijk}\, d\varphi_j$

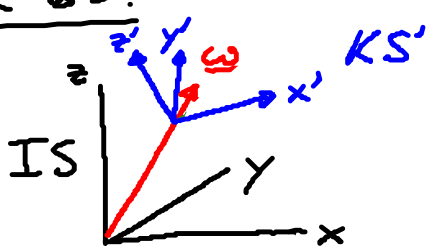
(3) $$\boxed{\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}) = \left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{\varphi}}{n}\times\right)^n \overset{n\to\infty}{:=} e^{\underline{\varphi}\times} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\underline{\varphi}\times)^n}$$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{=} e^x$

→ Lie-Gruppen-Darstellung der Drehungen

b) <u>rotierende BS</u>:

· Geometrie:




· Vektor $\underline{a}(t)$: $\quad d\underline{a}_{IS} = d\underline{a}_{KS'} + \underline{\omega}\, dt \times \underline{a}$ (7.9)

$$\frac{7.9}{dt} \longrightarrow \boxed{\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}} \quad (7.10)$$

- „Zeitoperator:“ $$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega}\times} \quad (7.11)$$

- gemeinsamer Ursprung von IS und KS': $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$

aber: $$\dot{\mathbf{r}} := \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{IS} \neq \dot{\mathbf{r}}' := \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{KS'} \quad (7.12)$$

richtig: $$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \quad !$$

- $\boxed{\boldsymbol{\omega} = \text{konst.}}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ $$\longrightarrow \ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{IS} \overset{(7.11)}{=} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \boldsymbol{\omega}\times\right]\mathbf{r}$$

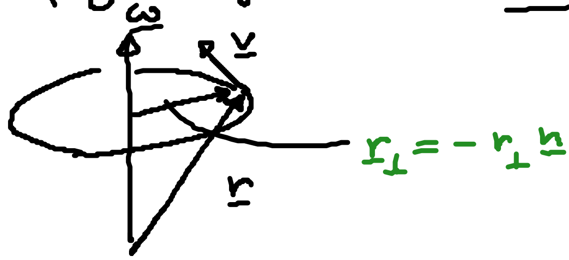
$$= \ddot{\mathbf{r}}' + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\mathbf{b}_0} \quad (7.13)$$

- IS: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$

$\longrightarrow$ Bew.gl. in KS':

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}' &= \mathbf{F} + \overset{-m\mathbf{b}_0}{\mathbf{F}_s'} \\ \text{mit } \mathbf{F}_s' &= \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}'}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{- m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}} \end{aligned}} \quad (7.14)$$

- Zentrifugalkraft:

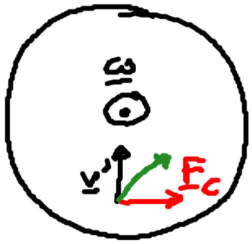



$$\longrightarrow -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

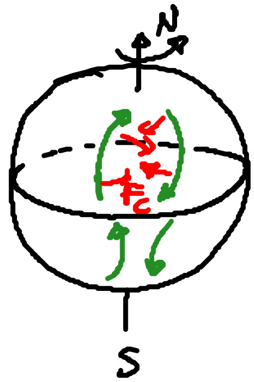
$$= m\frac{v^2}{r_\perp}\underbrace{\frac{\mathbf{r}_\perp}{r_\perp}}_{-\mathbf{n}} \qquad \left[\omega = \frac{v}{r_\perp}\right]$$

... Massenkörper wird radial nach außen getrieben

- Corioliskraft: falls $\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v}' \neq \mathbf{0}$




Erde




Bewegung auf $\left.\begin{array}{l}\text{Nord}\\\text{Süd}\end{array}\right\}$ halbkugel: $\left.\begin{array}{l}\text{„Rechts"}\\\text{„Links"}\end{array}\right\}$ abweichung

Meterologie:

$\left.\begin{array}{l}\text{NO}\\\text{SO}\end{array}\right\}$ Passate: (Winde von Äquator)

Unterspülung des $\left.\begin{array}{l}\text{rechten}\\\text{linken}\end{array}\right\}$ Ufer (in Flußrichtung)

## II. Newtonsche Mechanik für Vielteilchen-Systeme

- System von N Massepkten
  Zustandsraum: Raum der 3N Ortskoordinaten
- Bsp: Zweikörperproblem (→ Kap. 6, 9)
  Stoßprozesse (→ Kap. 9)
  starre Körper (→ Kap. 10)
  schwingende, gekoppelte (→ Kap. 11)
- mechanische Freiheitsgrade $f$: beschreiben Lage der N Massepkte eindeutig

$$\boxed{f = 3N - Z}$$

Zahl der Zwangsbedingungen

Bsp:

$f = 6$ $\qquad$ $f = 6 - 1 = 5$

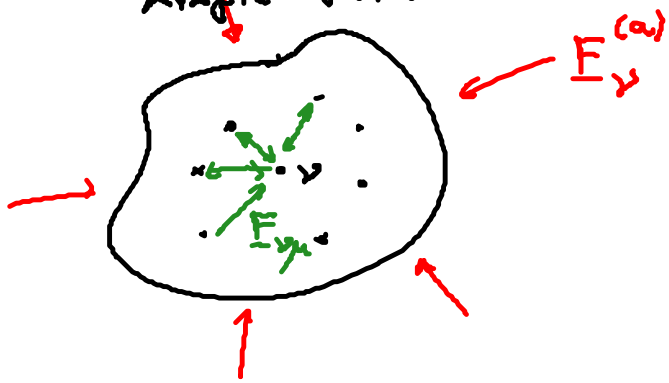
# 8. Newtonsche Grundgleichungen & Folgerungen

## 8.1. Grundgleichungen

- „Newton" für Massepunkte $\nu = 1, \dots, N$:

$$m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\underline{p}_\nu = \underline{F}_\nu$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{mit } \underline{F}_\nu &= \underbrace{\underline{F}_\nu^{(a)}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underline{F}_\nu^{(i)} \\ &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq\nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}_{\text{innere Kräfte von allen anderen Massepktn: Zweiteilchen-Kräfte!}} \end{aligned}} \qquad (8.1)$$




- innere Kräfte: Bsp: Coulomb.. } Kräfte, Gravitations } Kräfte

chem. Bindungskräfte (in Molekülen etc)

(i) $\underline{F}_{\nu\mu} = \underbrace{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu)}$ ... Kraft von $m_\mu$ auf $m_\nu$

Annahme: $\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$ ... Zentralkräfte

(ii) actio = reactio $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) = -\underline{F}_{\mu\nu}(\underline{r}_\mu - \underline{r}_\nu)}$ (8.5)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_{\nu\nu} = 0 \longrightarrow \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}$$

(iii) innere Gesamtkraft:

$$\boxed{\underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_{\nu}^{(i)} = \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^{N}}_{\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}} \underline{F}_{\nu\mu} = 0} \qquad (8.6)$$