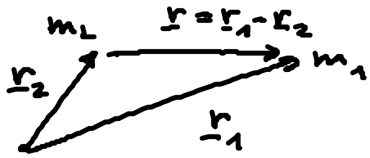
9. Das Zweikörper-Problem



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \\ \underline{R} &= \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M = m_1 + m_2} \end{aligned}} \quad (9.2) \Bigg\} \longleftrightarrow \Bigg\{ \boxed{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M}\underline{r} \end{aligned}} \quad (9.3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \\ &\longrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}} \quad (9.5)$$

... reduz. Masse

• Entkoppeln der Bew.gl.:
z.B. im Gravitationsfeld:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\underline{R}} &= \underline{g} \\ \mu \ddot{\underline{r}} &= \underline{F}_{12}(\underline{r}) \end{aligned}} \quad (9.8)$$

• Gesamtimpuls: $\boxed{\underline{P} = M \dot{\underline{R}}}$ (9.9) [s. Kap. 8.2]

„Relativimpuls": $\boxed{\underline{p}^* = \mu \dot{\underline{r}}}$ (9.10)

• Gesamtdrehimpuls: $\underline{L} = \underline{r}_1 \times \underline{p}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{p}_2$

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{(9.3)} \boxed{\underline{L} = \underline{L}_M + \underline{L}_\mu = \underline{R} \times \underline{P} + \underline{r} \times \underline{p}^*} \quad (9.11)$$

• kinet. Energie: $T = \frac{m_1}{2}\dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\underline{r}}_2^2$

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{(9.3)} \boxed{T = \frac{M}{2}\dot{\underline{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\underline{r}}^2 = \frac{\underline{P}^2}{2M} + \frac{\underline{p}^{*2}}{2\mu}} \quad (9.12)$$

b) Keplerproblem: $\rightarrow$ Kap. 6

c) <u>Schwerpunkt-Bezugssystem</u> (SS oder <u>C</u>enter <u>o</u>f <u>M</u>ass <u>S</u>ystem)

- <u>Def</u>: $\boxed{\underline{R}^* = \underline{0}\ ,\ \text{Ursprung des SS im Schwerpkt.}}$ (9.13)

- Größen in SS: bezeichne mit $*$
- SS ist Nicht-IS, falls $\underline{F}_1^{(a)} + \underline{F}_2^{(a)} \neq 0$
- Ortsvektoren: (9.3) $\xrightarrow{\underline{R}=0}$ $\boxed{\begin{aligned} \underline{r}_1^* &= \frac{m_2}{M}\underline{r} \\ \underline{r}_2^* &= \frac{m_1}{M}\underline{r} \end{aligned}}$ (9.14)

- Teilchenimpulse: $M\dot{\underline{R}}^* = \underline{0} = \underline{p}_1^* + \underline{p}_2^*$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{p}_1^* = m_1 \dot{\underline{r}}_1^* = -\underline{p}_2^* \underset{(9.14)}{=} \mu \dot{\underline{r}} = \underline{p}^*} \quad (9.15)$$

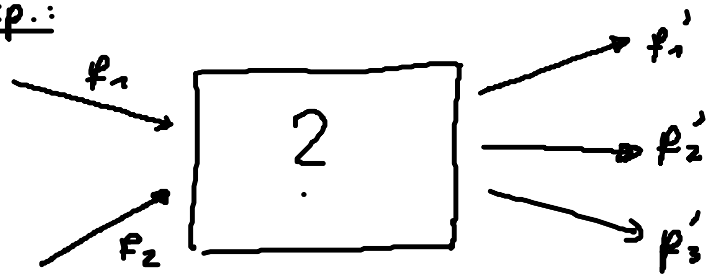
- kinet. Energie im SS:

$$\boxed{T^* = \frac{p^{*2}}{2m_1} + \frac{p^{*2}}{2m_2} = \frac{p^{*2}}{2\mu}} \quad (9.16)$$

- kinet. Energie im Laborsystem (LS):

(9.12) & (9.16) $$\boxed{T = \underbrace{\frac{P^2}{2M}}_{\text{konst. für } \underline{F}_1^{(a)} + \underline{F}_2^{(a)} = 0\,!} + T^*} \quad (9.17)$$

- <u>Stoßexp.</u>:



$\underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2$

$\underline{P} = \sum \underline{p}_i'$!!

nur T^* in „Produktion", „Anregung" von Teilchen verwendbar

effektiver Stoßprozeß $\longrightarrow$ $p = 0$ $\longrightarrow$ T^* maximal: $\boxed{LS = SS}$

· Bsp: (1) $\underset{p_1}{\overset{m_1}{\longrightarrow}}$ $m_2, p_2 = 0$ $\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\boxed{T^* = \frac{p^{*2}}{2\mu} = \frac{m_2}{M} T_1}$ (9.18)

$m_1 = m_2 \longrightarrow T^* = \frac{T_1}{2}$

(2) Teilchenbeschleuniger

Idee: Stoß von Elementarteilchen $\xrightarrow[E=mc^2]{\text{Zerstrahlen}}$ „Teilchenzoo"

(i) (1) $\longrightarrow$ p Proton; (2) p ruhend „Target"

Gesamtenergie: $T_1 + \underbrace{2m_0c^2}_{\approx 2\,\text{GeV}} \overset{!}{\approx} 7\,\text{TeV} \gg 2m_0c^2$

... hoch relativistisch

$\xrightarrow{\text{o.B.}} T^* = \sqrt{2m_0c^2 T_1} \approx 120\,\text{GeV}!$
$\ll 7\,\text{TeV}$

(ii) besser: Large Hadron Collider (Cern, Genf)

$LS \equiv SS$: $\underset{\substack{p \\ 3{,}5\,\text{TeV}}}{\bullet\!\longrightarrow}$ $\underset{\substack{p \\ 3{,}5\,\text{TeV}}}{\longleftarrow\!\bullet}$ $\Longrightarrow T^* = 7\,\text{TeV}$!!

d) Elastischer Zweiteilchen Stoß:

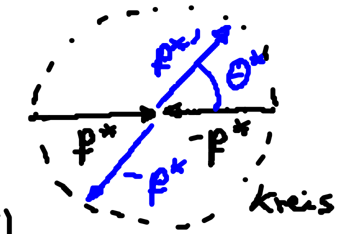
↳ keine innere Anregungen der Teilchen

α) LS: Impulse vor Stoß p_1, p_2
nach " p_1', p_2'

$$E_i^{(a)} = 0 \xrightarrow{(9.19)} \boxed{\begin{array}{l} \underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}_1' + \underline{p}_2' = \underline{P} \\ T_1 + T_2 = T_1' + T_2' \end{array}} \begin{array}{l} \ldots \text{ Erhaltung Gesamtimpuls} \\ \ldots \text{ EES} \end{array}$$

β) SS:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{vor Stoß:} & \underline{p}_1^* = -\underline{p}_2^* = \underline{p}^* \\ \text{nach } \text{〃}: & \underline{p}_1^{*\prime} = -\underline{p}_2^{*\prime} = \underline{p}^{*\prime} \end{array}\right\}$$



$$\text{EES: } T^* = T^{*\prime} \longrightarrow |\underline{p}^*| = |\underline{p}^{*\prime}|$$

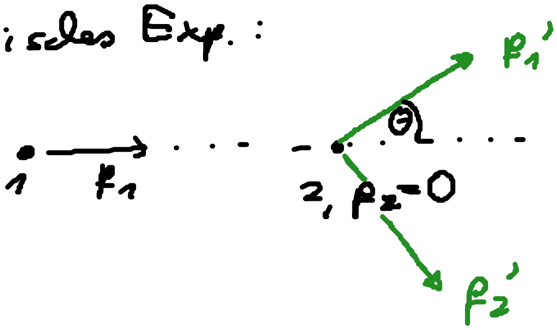
γ) LS ⟷ SS ?

(9.3) & (9.14)

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\underline{r}}_1 = \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r}}_1^* \\ \dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{R}} - \dot{\underline{r}}_2^* \end{array}\right\} \xleftrightarrow[(9.20)]{} \left\{\begin{array}{l} \underline{p}_1 = \frac{m_1}{M}\underline{P} + \underline{p}^* \\ \underline{p}_2 = \frac{m_2}{M}\underline{P} - \underline{p}^* \end{array}\right.$$

gilt vor/nach Stoß

- typisches Exp.:

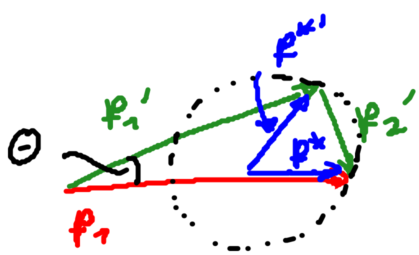


Θ … Streuwinkel im LS

<u>Frage:</u> $\Theta \longleftrightarrow \Theta^*$? [Übungen]

<u>Vektordiagramm</u>

$m_1 > m_2$



o.B.

$$\boxed{\tan\Theta = \frac{\sin\Theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\Theta^*}}$$

$\longrightarrow$ im SS Θ^* beliebig

im LS Θ begrenzt, je extremer $m_1 > m_2$

$\longrightarrow$ schlechte Winkelauflösung im LS $\rightarrow$ SS

10. Der starre Körper

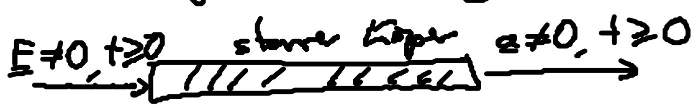
· **Def:** Ein System von abzählbar, sehr vielen Massenpunkten m_ν, deren Abstände $|\underline{r}_{\nu\mu}| = |\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|$ für alle ν, μ konstant sind (10.1)

$\longrightarrow$ starr $\equiv$ keine Deformation möglich

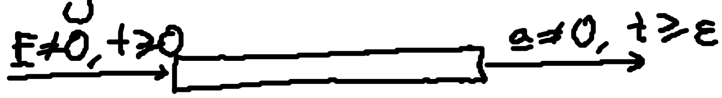
· **Bsp:** Festkörper, ändern sich wenig unter Druck, Tempänderung etc.

• starrer Körper: idealisiertes Objekt der klass. Mechanik

Bsp: instantane Kraftausbreitung:



RT: Lichtgeschw. $c \equiv$ max. Geschw.



· Zahl der Freiheitsgrade:

$$f = 3N - Z$$

Z: Zwangsbed. $|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu| = \text{konst}$

N	Z	f
1	0	3
2	1	5
3	3	6
4	6	6
5	9	6
⋮	⋮	⋮

$\longrightarrow$ Der starre Körper hat 6 Freiheitsgrade: (10.2)

3 für Translation (Lage im Raum)

3 für Rotation (Orientierung im Raum)

· weitere Einschränkung

a) Rotation um ortsfesten Punkt. $\longrightarrow f = 3$

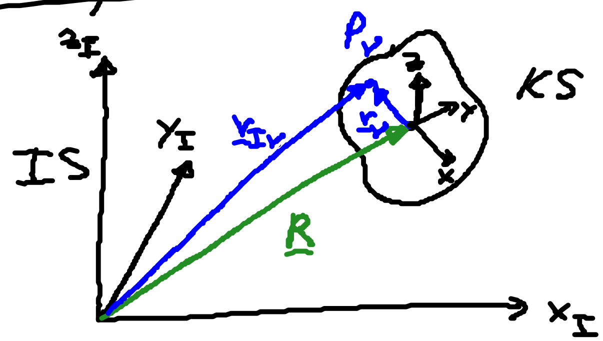
Bsp. Kreisel in kardanischer Aufhängung

$\longrightarrow$ Schiffskompaß

b) Rotation um ortsfeste Achse $\longrightarrow f = 1$

10.1 Kinematik

a) Koord.system:



1. ortsfestes Koord.system IS: $\{x_I, y_I, z_I\} = \{x_{I1}, x_{I2}, x_{I3}\}$,
$\{\underline{e}_{I1}, \underline{e}_{I2}, \underline{e}_{I3}\}$

2. körperfestes " KS: $\{x, y, z\} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

KS i.a. kein IS

- $\underline{R}$ ... „Aufpkt." Bsp: Schwerpkt, Auflagepkt, Symmetriezentrum ...

- Pkt. $P_\nu \in$ starren Körper: $\underline{r}_{I\nu} = \underline{R} + \underline{r}_\nu$ (10.3)

b) Eulersche Satz:

$\boxed{\text{Jede Bewegung des starren Körpers läßt sich zu jedem Zeitpkt. zerlegen in eine Translation des Aufpkts } \underline{R}(t) \text{ und eine Rotation um eine momentane Drehachse } \underline{\omega}(t) \text{ durch den Aufpkt.:}}$

Jede Bewegung des starren Körpers läßt sich zu jedem Zeitpkt. zerlegen in eine Translation des Aufpkts $\underline{R}(t)$ und eine Rotation um eine momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$ durch den Aufpkt.: (10.4)

$$\dot{\underline{r}}_{I\nu}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_\nu(t) \quad \forall P_\nu$$