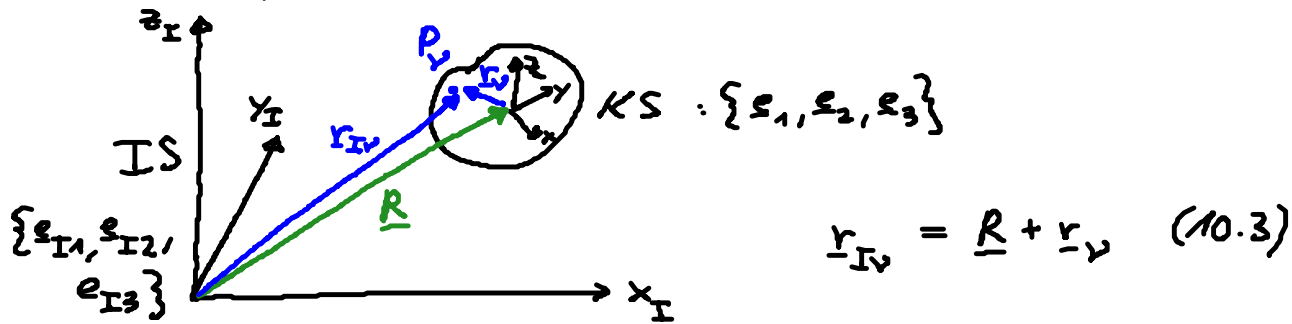


# 10.1. Kinematik

a) Koord. systeme:



b) Eulerscher Satz

Jede Bewegung des starren Körpers lässt sich zu jedem Zeitpkt. zerlegen in eine Translation des Aufpunkts  $\underline{R}(t)$  und eine Rotation um eine momentane Drehachse  $\underline{\omega}(t)$  durch den Aufpkt.

$$\dot{\underline{r}}_{Iv}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_v(t) \quad \forall P_v \quad (10.4)$$

Beweis:

(i)  $d \underline{r}_{Iv}(t) \stackrel{(10.3)}{=} d\underline{R}(t) + d\underline{r}_v(t) \quad (*)$

starrer Körper:  $|\underline{r}_v| = \text{konst.} \quad \forall t \rightarrow d\underline{r}_v \perp \underline{r}_v$

$$\xrightarrow{(7.5)} d\underline{r}_v = d\varphi \underline{e}_\omega \times \underline{r}_v$$

mit  $\underline{\omega}_v = \frac{d\varphi}{dt} \underline{e}_\omega$  &  $\frac{d}{dt} : \dot{\underline{r}}_{Iv}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}_v \times \underline{r}_v$

(ii)  $\underline{\omega} = \underline{\omega}_v = \underline{\omega}_\mu?$

Rel. geschw.  $\dot{\underline{r}}_{Iv} \stackrel{(10.3)}{=} \dot{\underline{r}}_v - \dot{\underline{r}}_\mu$

$$= \underline{\omega}_v \times \underline{r}_v - \underline{\omega}_\mu \times \underline{r}_\mu \perp \underline{r}_v - \underline{r}_\mu$$

nur mit  $\omega_v = \omega_\mu = \omega$

$$\rightarrow \dot{r}_\nu - \dot{r}_\mu = \underline{\omega} \times (r_\nu - r_\mu) \quad \text{ged}$$

• Satz:  $\underline{\omega}$  ist unabh. von Wahl von  $\underline{R}$  (10.5)

Beweis: Übungen?

c) Euler'sche Winkel:

• Lage des starren Körpers:

(i)  $\underline{R} \rightarrow$  3 Koord.

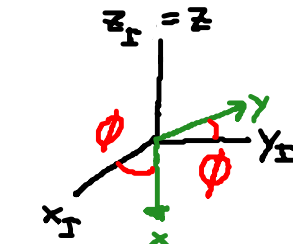
(ii) Orientierung von KS relativ zu IS.

$\rightarrow$  Euler'sche Winkel

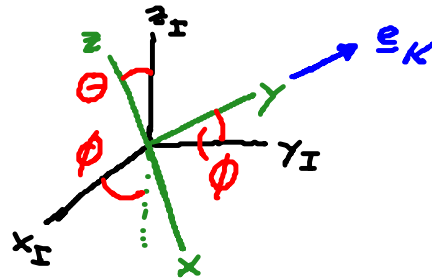
$\rightarrow f=6!$

• Starte mit IS = KS:

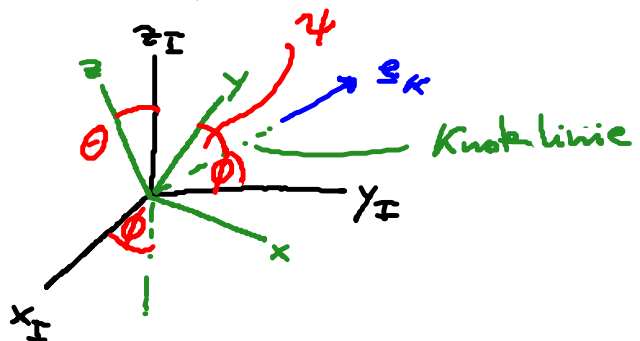
$\Phi$ : Rot. um  $z_I = z$ -Achse:



$\Theta$ : Rot. um momentane  $y$ -Achse:



$\psi$ : Rot. um  $z$ -Achse:



• von  $\underline{\omega}$  zu  $\Phi, \Theta, \psi$ : [vgl. von  $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \rightarrow \underline{r}$ ]

[s. Kopie]

## 10.2 Dynamik des starren Körpers (I) & Trägheitstensor

## a) Dynam. Grundgleichungen:

- starrer Körper  $\equiv$  Spezialfall eines Vielkörper-System
- innere Kräfte:

$$\underline{F}_{\nu\mu} = -\underline{F}_{\mu\nu} \rightarrow \underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu\mu} \underline{F}_{\nu\mu} = 0 \quad (8.6) \quad \dots, \text{ "Mündhausen"}$$

$$\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_{I\nu} - \underline{r}_{I\mu} \rightarrow \underline{D}^{(i)} = \sum_{\nu\mu} \underline{r}_{I\nu} \times \underline{F}_{\nu\mu} = 0 \quad (8.7)$$

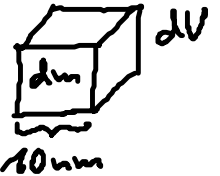
... "keine spontane Rotation"

starrer Körper: (i)  $\underline{F}^{(i)} = 0 = \underline{D}^{(i)}$  !  
 (ii) innere Kräfte  $\rightarrow$  Starrheit

## • Kontinuumslimites:

diskrete Massenpunkte  $m_\nu \rightarrow$  kont. Massenverteilung:  $dm = g(\underline{r}) d^3r$

Massendichte:  $g(\underline{r}) = \frac{dm}{dV = d^3r}$



$$\sum_{\nu} m_{\nu} \dots \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}) \dots \quad (10.9)$$

$\rightarrow 10^4 - 10^6$  Atome  
in  $dV$

Bsp. (1) Gesamtmasse:  $M = \sum_{\nu} m_{\nu} \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}) \quad (10.10)$

(2) " Impuls:  $\underline{P} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\underline{r}}_{I\nu} \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}_I) \underline{v}(\underline{r}_I) \quad (10.11)$

(3) " Drehimpuls:  $\underline{L}_I = \sum_{\nu} m_{\nu} \underline{r}_{I\nu} \times \dot{\underline{r}}_{I\nu} \rightarrow \int d^3r g(\underline{r}_I) \underline{r}_I \times \underline{v}(\underline{r}_I) \quad (10.12)$

im folgenden !!

## • Bewegungsghn:

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{\nu} \underline{F}_{\nu}^{(a)} = \underline{F}^{(a)} \quad (10.13) \quad [(8.8)]$$

$$\dot{\underline{L}}_I = \sum_{\nu} \underline{r}_{I\nu} \times \underline{F}_{\nu}^{(a)} = \sum_{\nu} \underline{D}_{\nu}^{(a)} = \underline{D}^{(a)} \quad (10.14) \quad [(8.14)]$$

... 6 Dgl., die die Dynamik des starren Körpers ( $f=6$ )  
eindeutig bestimmen.

• Gleichgewichtsbed.:  $\left. \begin{matrix} \underline{F}^{(a)} = 0 \\ \underline{D}^{(a)} = 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{\dot{P}} = 0 \\ \underline{\dot{L}}_I = 0 \end{matrix} \right. \rightarrow$  Grundlage der Statik!

• im folgenden: 2 Fälle:

(i) Auf pkt.  $\underline{R}$  = Schwerpkt  $\underline{R}_s = \frac{\sum_v m_v \underline{r}_{Iv}}{M}$

Bsp: Erde, frei fallender Kreisler

(ii)  $\underline{R}$  mit  $\underline{\dot{R}} = 0$

Bsp. Kreisler mit festem Auflagepkt.

Folgerungen mit (10.4):  $\underline{v}_{Iv}(t) = \underline{\dot{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_v(t)$

b) Impuls:

(i)  $\underline{R} = \underline{R}_s$ :  $\underline{P} = \sum_v m_v \underline{v}_v \stackrel{(10.4)}{=} M \underline{\dot{R}}_s + \underline{\omega} \times \underbrace{\sum_v m_v \underline{r}_v}_{=0, \underline{R} = \underline{R}_s!}$

$$\rightarrow \underline{P} = M \underline{\dot{R}}_s \quad (10.16)$$

(ii)  $\underline{\dot{R}} = 0$ :

$$\underline{P} = \underline{\omega} \times \sum_v m_v \underline{r}_v = \underline{\omega} \times M \underline{r}_s \quad (10.17)$$



c) Drehimpuls

$$\underline{L}_I = \sum_v m_v \underbrace{\underline{r}_{Iv}}_{\underline{R} + \underline{r}_v} \times \underbrace{\underline{v}_{Iv}}_{= \underline{\dot{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_v} \quad (*)$$

(i)  $\underline{R} = \underline{R}_S$   
 $\sum_{\nu} m_{\nu} \underline{r}_{\nu} = 0$

$$\underline{L}_I = \underline{L}_S + \underline{L} \quad (10.18)$$

$$\text{mit } \underline{L}_S = M \underline{R}_S \times \dot{\underline{R}}_S \stackrel{(10.16)}{=} \underline{R}_S \times \underline{P} \quad (10.19)$$

$$\underline{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} \underline{r}_{\nu} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{\nu}) \quad (10.20)$$

$\underline{L}_I$  ... Drehimpuls bzgl. Ursprung von IS  
 $= \underline{L}_S$  ... " des Schwerpts. "  
 $+ \underline{L}$  ... " des starren Körpers bzgl. Aufpht. =  $\underline{R}_S$

(ii)  $\dot{\underline{R}} = 0 \xrightarrow{(*)} \underline{L}_I = \underbrace{\underline{R} \times (\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} \underline{r}_{\nu}}_{M \underline{r}_S})}_{\underline{P} \text{ (s. (10.19))}} + \underline{L} \quad (10.20)$

$\rightarrow \underline{L}_I = \underline{L}_S + \underline{L} = \underline{R} \times \underline{P} + \underline{L}$  wie (10.18)  
 (10.21) - (10.20)

mit  $\underline{L}$  bzgl.  $\underline{R}$ !

d) Trägheitstensor: Umschreibung von (10.20)

• Hilfsformel:  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{a}) = |\underline{a}|^2 \underline{b} - \underline{a} (\underline{a} \cdot \underline{b})$   
 $= |\underline{a}|^2 \underline{b} - (\underline{a} \otimes \underline{a}) \underline{b}$   
 $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b} (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{a} \cdot \underline{b}) = (|\underline{a}|^2 \underline{1} - \underline{a} \otimes \underline{a}) \underline{b} \quad (10.22)$

[NB:  $\underline{u} \otimes \underline{v}$  ... dyadisches Produkt von  $\underline{u}, \underline{v}$ ; spezieller Tensor 2. Stufe

$$(\underline{u} \otimes \underline{v}) \underline{b} = \underline{u} (\underline{v} \cdot \underline{b}) \quad (10.23)$$

• Drehimpuls  $\underline{L}$ : (10.20) mit (10.22) ( $\underline{\omega} = \underline{b}, \underline{a} = \underline{r}_{\nu}$ ) (10.24)

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} \text{ mit } \underline{\Theta}(t) = \sum_{\nu} m_{\nu} [|\underline{r}_{\nu}|^2 \underline{1} - \underline{r}_{\nu}(t) \otimes \underline{r}_{\nu}(t)]$$

.. Trägheitstensor  
 in coord. unabh. Form

(i)  $\underline{\Theta}$  ... Eigenschaft des starren Körpers

(ii) lin. Abb.



• Komponentendarstellung: bzgl. ONB  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{L} = \underline{\Theta} \underline{w} \quad \rightarrow \quad L_i = \underline{e}_i \cdot \underline{\Theta} \underline{e}_j \omega_j$$

$= \omega_j \underline{e}_j$

(10.25)

$$\rightarrow L_i = \Theta_{ij} \omega_j \text{ mit } \Theta_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\Theta} \underline{e}_j = \sum_{\nu} m_{\nu} [1 \underline{x}_{\nu}^2] \delta_{ij} - x_{\nu i} x_{\nu j}$$

Matrix  $\underline{\Theta}$  mit  $[\Theta]_{ij} = \Theta_{ij}$  !!

$$x_{\nu i} = \underline{e}_i \cdot \underline{x}_{\nu}$$

[Bsp. s. Übungen]