

# 10.3 Dynamik des starren Körpers II:

## Eulersche Gleichungen

$$\boxed{\dot{\underline{L}} = \underline{D}} \quad (10.44)$$

... Drehimpulssatz für starren Körper  
bzgl. Aufpkt.  $\underline{R} \rightarrow$  Rotationsbewegung

b) Eulersche Gln.:

• Zeitabl. in (10.44):  $\dot{\underline{L}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{IS}^{(7.11)} \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (7.11)$

also: (10.44) mit (7.11) &  $\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$ :

$$\left(\frac{d\underline{\Theta}\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta}\underline{\omega}) = \underline{D}$$

$$\left(\frac{d\underline{\Theta}}{dt}\right)_{KS} = 0$$

$$\underline{\Theta} \left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega} \times (\underline{\Theta}\underline{\omega}) = \underline{D} \quad (10.45)$$

• Drehimpulssatz im Körper festen Hauptachsensystem  $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$

des starren Körpers:  $\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \underline{\Theta}\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix}$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$(10.45) \rightarrow \dot{\omega}_i = \left(\frac{d\omega_i}{dt}\right)_{KS}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= D_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 &= D_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= D_3 \end{aligned}} \quad (10.46)$$

... Eulersche Gln.

$$\longrightarrow \underline{\omega} = \omega_i \underline{e}^{(i)} \quad (\text{Körperfesten})$$

$$\xrightarrow{(10.8)} \phi(t), \Theta(t), \psi(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Vgl.}}$$

Vorteil von KS:  $\underline{\Theta}, \Theta_i = \text{konst.}$

Nachteil:  $\omega_i$ : zeitabh.  $D_i$ , bestimmt durch die Bewegung des starren Körpers

### Anwendungen

c) Rotation um freie Achse (hom. Grav. feld):

Bsp. freifallender Körper:  $\underline{R} = \underline{R}_S \longrightarrow \underline{D} = \sum_{\nu} \underline{r}_{\nu} \times m_{\nu} \underline{g}$

$$= \underbrace{\left( \sum_{\nu} m_{\nu} \underline{r}_{\nu} \right)}_{=0} \times \underline{g}$$

$$= 0!$$

Ges: Lsg. von (10.46) mit  $\dot{\omega}_i = 0$

$$(10.46) \left. \begin{array}{l} \dot{\Theta}_i = 0 \\ \dot{\omega}_i = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{allg. Fall} \\ \Theta_i \neq \Theta_j \\ i \neq j \end{array} \right\}$$

$$\omega_1 = \text{konst.}, \omega_2 = \omega_3 = 0$$

& zykl. Vertauschung

$\cong$  gleichf. Rotation um Hauptachsen mit fester Richtung im IS

Beweis:  $\underline{D} = 0 = \left( \frac{d\underline{L}}{dt} \right)_{IS}$

$$\rightarrow \underline{L} = \text{konst. im IS}$$

$$= \Theta_1 \omega_1 \underline{e}^{(1)}$$

$$\rightarrow \underline{e}^{(1)} = \text{konst. im IS}$$

qed

• Beh:

Rotationen Hauptachse mit mittlerem  $\Theta_i$  ist instabil

$\rightarrow$  Beweis: Übungen:

$$\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \omega_2 + \delta\omega_2 \\ \delta\omega_3 \end{pmatrix}$$

d) Kräftefreier symmetr. Kreisel

Löse (10.46) für  $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$  &  $D_i = 0$

Bsp: rot. symmetr. Körper um  $\underline{e}^{(3)}$  = Figurenachse

→ Kardanscher Kreisel

→ freifallende Körper: Bsp. Erde ( $\underline{D}^{Sonne} \approx 0$ ,  $\underline{D}^{Mond} \times 0$ )

(10.46)  $D_i = 0$        $\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_2 \omega_3 = 0$  (1)

$\Theta_1 = \Theta_2$        $\Theta_1 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 = 0$  (2)

$\Theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_0}$  (10.49)

(1), (2)  $\xrightarrow{(10.49)}$   $\dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0$  (3)

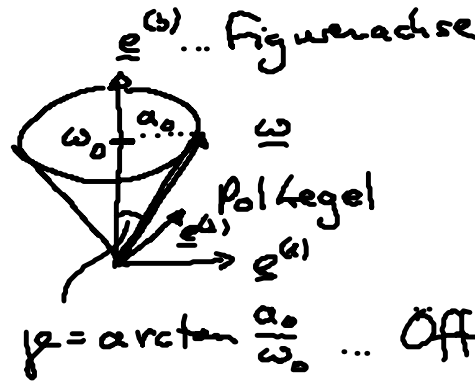
$\dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 = 0$  (4) mit  $\boxed{\Omega = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_0}$

$\frac{d}{dt}$  (3) & (4)       $\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0 \rightarrow \boxed{\omega_1(t) = -a_0 \cos(\Omega t + \varphi_0)}$

$\xrightarrow{(4)}$   $\boxed{\omega_2(t) = a_0 \sin(\Omega t + \varphi_0)}$

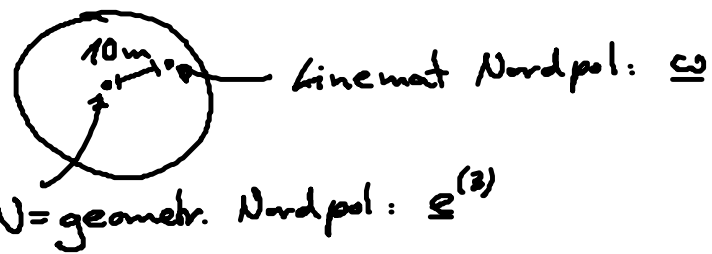
$a_0, \varphi_0$  ... Integrationskonst.  
 ... Kreisbewegung:  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0^2$

Skizze



$\underline{\omega}$  präzessiert  
 rotiert auf Polkegel um  $\underline{e}^{(3)}$   
 mit Kreisfrequenz  $|\Omega|$

Bsp. Erde



$|\Omega| = \frac{|\Theta_1 - \Theta_3|}{\Theta_1} \omega_0 = \frac{1}{300} \frac{2\pi}{\text{Tag}} \sim \frac{2\pi}{10 \text{ Monate}}$

real:  $\Omega \approx \frac{2\pi}{427 \text{ Tage}}$

& keine regelmäßige Präzession um  $\underline{e}^{(3)}$

Grund: (i) Erde nicht starr: elast. Verformungen  
Verschiebungen in Atmosphäre & Meeren

(ii)  $\underline{D} \neq 0$

• Bewegung im IS?  $\left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_{IS} \stackrel{D=0}{=} 0 \rightarrow \underline{L} = L \underline{e}_{I3} = \text{konst.}!$

$\omega_3 = \omega_0$ ,  $\omega_{1/2}(t)$  in (10.8)  $\rightarrow$  Eulersche Winkel: (10.52)

o.B.  $\phi = \frac{\omega_0}{\sin\Theta_0} t + \phi_0$ ,  $\psi = \Omega t + \psi_0$ ,  $\Theta = \Theta_0$  mit  $\tan\Theta_0 = \frac{\omega_0}{\omega_0 \cos\Theta_0}$

Drehung von  $\underline{e}^{(3)}$   
um  $\underline{e}_{I3}$

Drehung des  
starrten Körpers  
um  $\underline{e}^{(3)}$

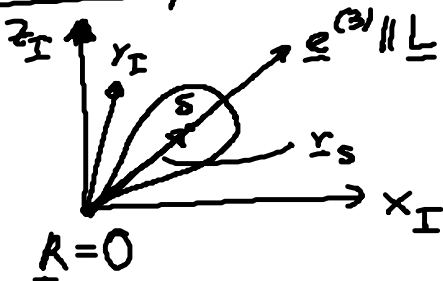
$\neq$  (Figuraachse  $\underline{e}^{(3)}$ ,  $\underline{e}_{I3}$ )

(10.6);  $\dot{\Theta} = 0$ ;  $\underline{\omega} = \underbrace{\frac{\omega_0}{\sin\Theta_0}}_{\phi} \underline{e}_{I3} + \underbrace{\Omega}_{\psi} \underline{e}_3 \dots$  liegt in Ebene von  $\underline{e}_{I3}$ ,  $\underline{e}^{(3)} = \underline{e}_3$

$\underline{\omega}$  additiv

1.  $\underline{\omega}$  rotiert auf Spurkegel um  $\underline{e}_{I3}$
  2. Polkegel rollt auf Spurkegel ab
- } reguläre Präzession

e) Schwerer symmetr. Kreisel:  $D_i \neq 0$

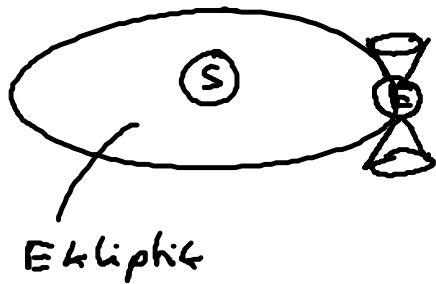


• homogenes Grav. feld:  $\underline{D} = - \sum_v \underline{r}_v \times m_v g \underline{e}_{Iz}$

$\left(\underline{r}_s = \frac{\sum m_v \underline{r}_v}{M}\right) \underline{D} = - \underline{r}_s \times M g \underline{e}_{Iz} = \frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{e}^{(3)} \parallel \underline{r}_s$   
 $\underline{z}_I$ -Achse

• sei  $\underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$   $\frac{d}{dt} \underline{L} \perp \underline{L} \Rightarrow \underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$  präzediert um  $\underline{z}_I$ -Achse!

- o.B.: allg. Bewegung: Präzession & Nutation  
↑ „Torkeln“ des Kreisel
- Erde:  $\underline{D}^{\text{Sonne}} \neq 0$ ,  $\underline{D}^{\text{Mond}} \neq 0 \rightarrow$  astronomische Präzession der Erdachse um Normale der Ekliptik: Periode 26000 Jahre



f) Eingespannter Kreisel: orts- und körperfeste Drehachse

(1) Rot. symmetrie um Drehachse  $\underline{\omega} \parallel \underline{e}_{I3} = \underline{e}_3$

$$\rightarrow \underline{\underline{\Theta}}_I = \begin{pmatrix} \Theta_{I11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{I11} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{I33} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}_I \underline{\omega} \underline{e}_{I3} = \Theta_{I33} \omega \underline{e}_{I3} \parallel \underline{\omega}$$

$$\text{mit } \dot{\underline{\omega}} = 0, \dot{\Theta}_{I33} = 0 \rightarrow \dot{\underline{L}} = 0 \rightarrow \underline{D} = 0 \checkmark$$

(2) ohne Rot. symmetrie  $\hat{=}$  nicht ausgewählter starrer Körper  
 $\Theta_{I13}(t), \Theta_{I23}(t) \neq 0$

$$\rightarrow \text{mit } \underline{\omega} = \omega \underline{e}_{I3} \rightarrow L_{I1} = \Theta_{I13}(t) \omega$$

$$L_{I2} = \Theta_{I23}(t) \omega$$

$$\rightarrow D_{I1} = \dot{L}_{I1} = \dot{\Theta}_{I13} \omega$$

$$D_{I2} = \dot{L}_{I2} = \dot{\Theta}_{I23} \omega$$

Drehmomente die durch  
Lager aufgebracht werden  
müssen  $\hat{=}$  Lagerkräfte  
(Bsp: Auto rad)

g) physikal. Pendel:

→ Übungen