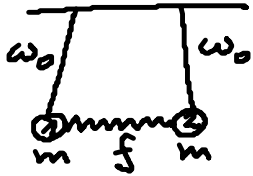


11. Harmonisch gekoppelte Massepunkte

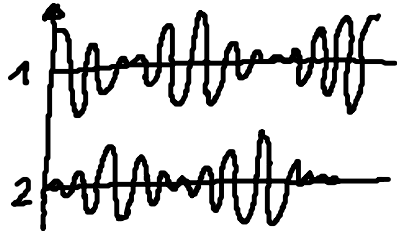
11.1 Motivation

• gekoppeltes Pendel:



Spezialfall: schwache Kopplung: $\omega_0^2 \gg \frac{f}{m}$
→ Schwebungen: Energie pendelt zwischen 1 & 2

Auslenkung



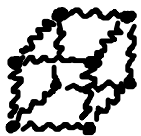
• Molekülschwingungen:



→ Molekülphysik

• Gitterschwingungen des Festkörpers:

↳ quantisiert: Phononen



→ Festkörperphysik: spezifische Wärme, elektr./therm. Leitfähigkeit

Untersuche über Spektroskopie (Einstrahlung von EM-Wellen & Absorption)

⇒ „Eigenfrequenzen“

• Modell für Saite:



11.2 Grundproblem

• N Massepunkte im 3d-Ortsraum: Freiheitsgrade $f = 3N$

• führe ein $3N$ -dim. kartesischer Konfigurationsraum

Vektor: $\underline{X} = (\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N) = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_{3N})$ (11.1)

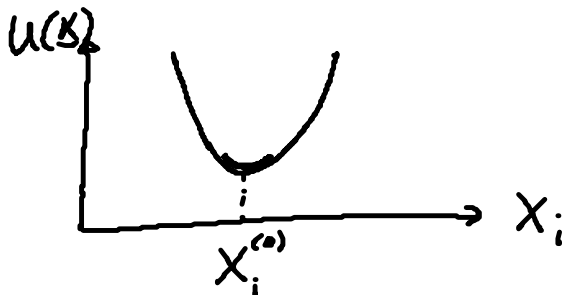
Ortskoord. der
N Teilchen

Bsp: $y_{323} = X_{2769}$
y-Koord.
Teilchen 323

\underline{X} .. charakt. Anordnung der N Massepunkte

• konserv. System: pot. Energie $U = U(\underline{X})$ (11.2)

• Def: Gleichgewichtslage $\underline{X}^{(0)}$ des Systems
 $\hat{=}$ Minimum von $U(\underline{X})$: $\frac{\partial U}{\partial X_i} \Big|_{\underline{X}^{(0)}} = 0$ (11.3)



• „Harmonische Kopplung“ $\hat{=}$ Potential in „harmonische Näherung“
mit $\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}$, wobei \underline{x} ... Auslenkung aus GG-Lage

$$U(\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}) \stackrel{\text{Taylor}}{\hat{=}} U(\underline{X}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial X_i} \Big|_{\underline{X}^{(0)}} x_i}_{=0! \text{ (11.3)}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{\underline{X}^{(0)}} x_i x_j + \dots$$

mit „Federkonstantenmatrix“:

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{\underline{X}^{(0)}} \quad (11.4)$$

Potential:

$$U(\underline{x}) = U(\underline{x}^{(0)}) + \underbrace{\frac{1}{2} U_{ij} x_i x_j}_{= \frac{1}{2} \underline{x} \cdot \underline{U} \underline{x}} \quad (11.5)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{3N} \end{pmatrix}$$

\underline{U}
mit $[U]_{ij} = U_{ij}$

$3N \times 3N$ -Matrix

(i) symmetrisch: $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$

(ii) positiv definit:

$$\frac{1}{2} \underline{x} \cdot \underline{U} \underline{x} > 0, \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$$

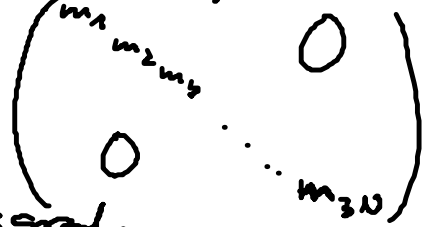
$\hat{=}$ alle EW > 0

kinet. Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}} \cdot \underline{M} \dot{\underline{x}} \quad \text{mit Massematrix } \underline{M}: \quad (11.6)$$

$M_{ij} = m_i \delta_{ij}$
(diagonale Tensor)

NB: $m_1 = m_2 = m_3 \dots$ Teilchen
etc



Newtonsche Grundgleichung für i -ten Freiheitsgrad:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i} = - U_{ij} x_j \quad (11.7)$$

mit „masse reduzierte Koord.“:

$$y_i = \sqrt{m_i} x_i \quad (11.8)$$

dynamische Matrix:

$$\underline{\Omega}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_j}} \quad (11.9)$$

$$(11.7): \sqrt{m_i} \ddot{x}_i = - \frac{1}{\sqrt{m_i}} U_{ij} \frac{1}{\sqrt{m_j}} \sqrt{m_j} x_j \rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{y}_i + \Omega_{ij} y_j = 0 \iff \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}} \underline{y} = \underline{0}} \quad (11.10)$$

... $3N$ Bew. gln.

• Eigenschaften von $\underline{\underline{\Omega}}$:

(i) symmetrisch. $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ (11.5)

(ii) positiv definit: pot. Energie $\rightarrow U(\underline{y}) = \frac{1}{2} \underline{y} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \underline{y} > 0, \forall \underline{y} \neq 0$

$\hat{=}$ EW von $\underline{\underline{\Omega}} > 0$

Grund: Minimum von $U(\underline{x})$

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normalkoordinaten

• Glm. (11.10) $\hat{=}$ mathematisch: $f = 3N$ lineare homogene DGl. 2. Ordnung mit konst. Koeff.

$\hat{=}$ physikal.: $f = 3N$ gekoppelte harm. Oszillatoren

$\rightarrow f$ Lösungen mit je 2 Integ. konst.

• Lsgs-ansatz: (vgl. harm. Oszillator Kap. 5.1)

$$\underline{y} = \underline{a} e^{i\omega t}, \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^{3N}$$

in (11.10) $/ e^{i\omega t}$
 \rightarrow

$$\boxed{[-\omega^2 \underline{1} + \underline{\underline{\Omega}}] \underline{a} = \underline{0}} \quad (11.11)$$

... Eigenwertgl. für $\underline{\underline{\Omega}}$: $\underline{\underline{\Omega}} \underline{a} = \omega^2 \underline{a}$

$\hat{=}$ lineares homog. algebraisches Glm.-system

• EW von $\underline{\underline{\Omega}}$? nichttriv. Lsg. von (11.11):

$$\boxed{\det[-\omega^2 \underline{1} + \underline{\underline{\Omega}}] = 0} \quad (11.12)$$

... Polynom f -ten Grades in ω^2

→ EW: $[\omega^{(k)}]^2 > 0$ ($\underline{\underline{\Omega}}$ symmetr, pos. definit)

→ **Eigenfrequenzen: $\pm \omega^{(k)} \in \mathbb{R}$, $k=1 \dots 3N$** (11.13)

• EV von $\underline{\underline{\Omega}}$? Löse (11.11) mit $\omega^{(k)}$

$\underline{e}^{(k)}$ mit $|\underline{e}^{(k)}| = 1$, $\underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(l)} = \delta_{kl}$ (11.14)

$\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\Omega}}^t$

... vollständiges ONB im \mathbb{R}^{3N}

• reelle Lsg. von (11.10). [vgl. Kap. 5d]

$\left. \begin{matrix} e^{+i\omega^{(k)}t} \\ e^{-i\omega^{(k)}t} \end{matrix} \right\} \rightarrow \underline{\chi}^{(k)}(t) = a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)}t - \varphi^{(k)})$ (11.15)

... Eigen-/Normalschwingung/Eigenmode zur Eigenfrequenz $\omega^{(k)}$

... Integrat. konst.: Amplitude $a^{(k)}$, Phase $\varphi^{(k)}$

... charakterisiert kollektive Schwingung aller Massepunkte mit unterschiedlicher Auslenkung

• allg. Lsg. von (11.10):

Superpositionsprinzip →

$\underline{\chi} = \sum_{k=1}^f \underline{\chi}^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^f a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)}t - \varphi^{(k)})$