

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normalkoordinaten

$$\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{Q}} \underline{x} = \underline{0} \quad (11.10)$$

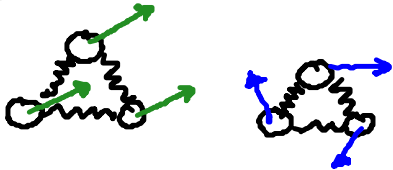
3N-dim. Vektor von Verschiebungen
relativ zur Gleichgewichtslage (massereduzierte Koordinaten)

Lösung:
$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{f=3N} a^{(k)} \underline{e}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}) \quad (11.16)$$

↑
EV von $\underline{\underline{Q}}$
 $[\omega^{(k)}]^2 \dots$ EW von $\underline{\underline{Q}}$

Bemerkungen

(1) in (11.10) enthalten: 3 Translationen: $\underline{x}_v(t) = \underline{v}t + \underline{x}_{v0}$
3 Rotationen



$$\omega^{(k)} = 0, \quad k = 1 \dots 6 \quad (11.17)$$

(2) Entartung:
$$\omega^{(k)} = \omega^{(l)}, \quad k \neq l \quad (11.18)$$

Bsp: 2-fache Entartung: \rightarrow Lsg.raum
Superposition aus: $\left[a_{\pm}^{(k)} \underline{e}^{(k)} + a_{\pm}^{(l)} \underline{e}^{(l)} \right] \begin{matrix} \cos \omega^{(k)} t \\ \sin \omega^{(k)} t \end{matrix}$

- (i) zufällige Entartung
- (ii) aufgrund von Symmetrien

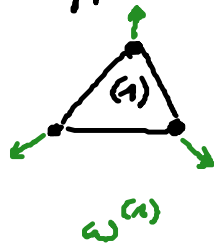
(3) Bsp:



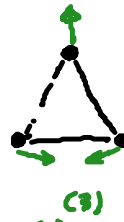
3-zählige Symmetrie um \odot
[Drehung um 120° : Molekül geht in sich über]

3 = 9 - 6 Eigenschwingungen
↑
f = 3N Transl. Rot.

Gruppen Theorie (GT):



$$= \omega^{(3)}$$



} keine Schwerpunktsbewegung

Komb. ergibt z.B.:



≙ (3) um 120° gedreht → ω^(3)

Symmetrien & Gruppentheorie → Eigenmoden

- Normalkoordinaten

$\{e^{(1)} \dots e^{(3N)}\}$... voll ständige ONB im \mathbb{R}^{3N}

→ allg. Lsg:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{3N} q^{(k)}(t) e^{(k)}$$
 mit $q^{(k)}(t) = y \cdot e^{(k)}$
 ... Normalkoord.
 (11.13)

- Dgl. für $q^{(k)}(t)$:

$$e^{(k)} \cdot \ddot{y} + \underline{\underline{\Omega}} y = 0 \quad (11.10)$$

mit (11.13) $\ddot{q}^{(k)} + e^{(k)} \cdot \sum_l \frac{\underline{\underline{\Omega}} e^{(l)}}{[\omega^{(l)}]^2 e^{(l)}} q^{(l)}(t) = 0$

$$\underline{\underline{e^{(k)} \cdot e^{(l)}}} = \delta_{kl}$$

$$\ddot{q}^{(k)} + [\omega^{(k)}]^2 q^{(k)} = 0 \quad (11.20)$$

$$k = 1 \dots 3N$$

also: Eigenschwingungen
 ≙ $f = 3N$ entkoppelte harm. Oszillationen
 der Frequenz $\omega^{(k)}$

Lsg:

$$q^{(k)}(t) = a^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}) \quad (11.21)$$

[vgl. (11.15)]

• Bsp:



[Übungen!]

11.4. Schwingende Saite: Wellengleichung

• Modell:



Gesamtlänge: $L = (N-1)l$

N Massepunkte, harm. gekoppelt mit nächstem Nachbarn

ϕ_n ... transversale Auslenkung des n -ten Massepunktes

• Newton für n -ten Massepkt.

$$m \ddot{\phi}_n = -f(\phi_n - \phi_{n-1}) - f(\phi_n - \phi_{n+1}) \quad (11.22)$$

harm. Näherung

f ? Saite vorgespannt:

$$\dots \overset{k}{\text{aus}} \overset{l_0}{\dots} \rightarrow \overset{k}{\text{aus}} \overset{l}{\dots} \xrightarrow{\text{o.B. kleine Auslenkungen}} f \approx k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (11.23)$$

• Kontinuumsübergang zur masse belegten Saite:

$$l = \Delta x \rightarrow 0, N \rightarrow \infty \quad (\text{bei gleicher Länge der Saite})$$

$$\phi_n(t) \rightarrow \phi(x, t)$$

↑
diskret. Index kont. Ortskoord.

$$\text{also: } \phi_{n+1} - \phi_n \rightarrow \phi(x \pm \Delta x) - \phi(x) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \pm \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

$$\rightarrow \text{r.S. in (11.22): } f \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (1)$$

$$\text{l.S. " " : } m \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2)$$

(11.24a)

sammle Koeff.: $\frac{\Delta x}{m} \underbrace{f \Delta x}_{(11.23), \Delta x=l} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{s} k(\Delta x - \Delta x_0) = G$

$$c^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{\text{Zugkraft}}{\text{Linie-Massen-dichte}}$$

c... Wellengeschw.

(1)=(2)
(11.24a)

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x,t) = 0 \quad (11.24)$$

.. Wellengleichung für „Feldamplitude“ Φ

[N Bgl. (11.22) \rightarrow partielle Bgl.]

• allg. Lsg. der Wellngl.:

neue Variablen: $x-ct = \xi \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$
 $x+ct = \eta$

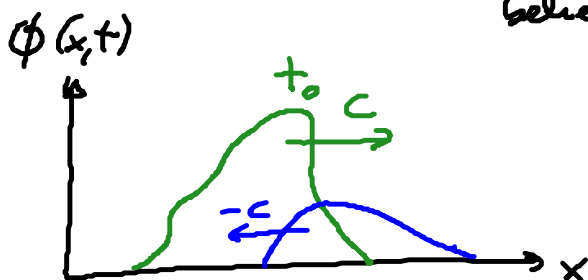
$$\frac{\partial}{\partial (ct)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

berechne: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (11.26)$

... „Wellenoperator“ aus (11.24)

(11.24) $\xrightarrow{\text{neue Variable}}$ $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Phi(\xi, \eta) = 0 \quad (11.27)$

allg. Lösung: $\Phi(\xi, \eta) = \underbrace{f(\xi)}_{\text{beliebige Fkt.}} + \underbrace{g(\eta)}_{\text{beliebige Fkt.}} = \underbrace{f(x-ct)}_{\text{forminvariant}} + \underbrace{g(x+ct)}_{\text{forminvariant}}$



laufen „forminvariant“
 nach rechts / links
 mit Geschw c!
 $\hat{=}$ keine Dispersion!

• Normalschwingungen:
 Ansatz: ebene Welle $\Phi(x,t) = a e^{i(kx - \omega t)}$ [komplexe Darstellung]

ω ... Kreisfrequenz (11.28)
 k ... Wellenzahl

in (11.24): $(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2) \Phi = 0 \rightarrow \omega = \pm ck$ (11.29) ... Dispersionsrelation
 $\omega = \omega(k)$

Normalschw.: (11.29) \rightarrow in ebene Welle
 $\Phi_k(x,t) \sim e^{i k(x-ct)}$... nach rechts laufende Welle
 $e^{i k(x+ct)}$... nach links

• Wellenzahl k erreicht die Werte Index $k = 1 \dots 30$ von Kap. 11.3

• allg. Lsg. der Wellen gl.:

Superpositionsprinzip: (11.31)
 $\Phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i k(x-ct)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} b(k) e^{i k(x+ct)}$

Fourier-Integral Darstellung eines nach rechts / links
 laufende Wellenpaketes $f(x-ct)$ / $g(x+ct)$

$\Phi(x,t)$ reell \rightarrow
 $a(-k) = a^*(k)$
 $b(-k) = b^*(k)$ (11.32)