

• Wellengleichung:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(x,t) = 0 \quad (M.24)$$

ebener Wellenansatz: $\Phi(x,t) = a e^{i(kx - \omega t)}$

$$\rightarrow \boxed{\omega = \pm ck} \quad (M.25) \quad \dots \text{Dispersionsrelation}$$

→ allg. Lsg. durch Superposition:

$$\Phi(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(x-ct)}}_{\text{nach rechts}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} b(k) e^{ik(x+ct)}}_{\text{links}} \quad (M.31)$$

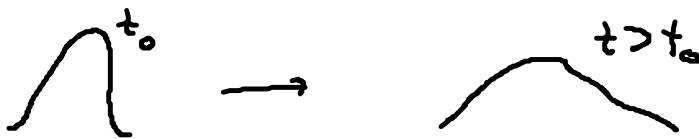
laufendes Wellenpaket: $f(x-ct)$ / $g(x+ct)$

• Wellen mit Dispersion: $\boxed{c = c(k)}$

Phasengeschw. einer Welle: $c = \frac{\omega(k)}{k} \quad (M.33)$

Annahme: $c = c(k)$ in Wellenpaket (M.31)

→ Paket zerfließt!



Bsp. a) EM-Wellen in Medium / Glasfaser!

b) QM. Welle eines freien Teilchens

$$\text{o.B.: } \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \rightarrow c = \frac{\hbar k}{2m}$$

• eingespannte Saite: s. Übung

III. Analytische Mechanik

• Motivation.

(i) Formalisierung der Newtonschen Mechanik

(ii) „elegante“ Lsg. wege für mechan. Probleme

→ Zwangsbed. } → Ingenieurwissenschaften
 → Zwangskräfte }

(iii) Formulierung der Quantenmechanik

(iv) Grundprinzipien zur Erkundung / Formulierung

(1) elementarer Wechselwirkung in der Natur

→ Integralprinzipien

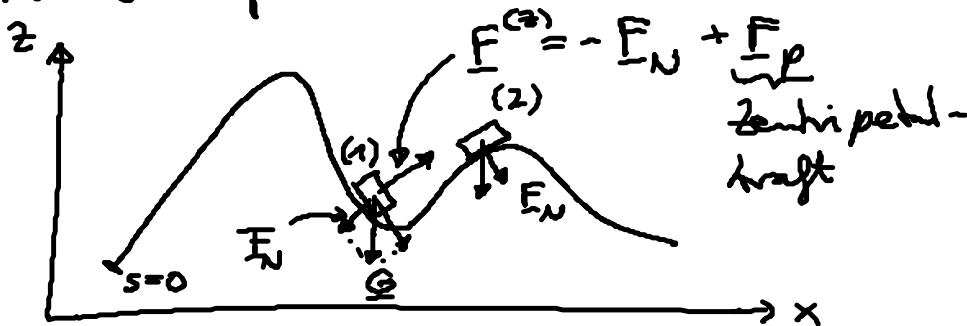
→ Extremal

(2) Dynamik komplexer Materialien

• Lit.: (i) Goldstein

(ii) Sommerfeld

• illustrierendes Bsp. zu (ii): Achterbahn



- festgelegte 1D-Bahn in xz -Ebene:

$$z = z(x) \quad (*) \quad \dots \text{Zwangsbedingung}$$

- generalisierte Koord. zur Zeit t :

z.B. $x(t) \xrightarrow{(*)} z(t) = z(x(t))$

z.B. $s(t) \xrightarrow{(*)} x(t), z(t)$

- Zwangskräfte $F^{(z)}$

- in (2): Wagen hebt nicht ab für $|F_p| \ll |F_N|$ } konstruierender Ingenieur!

• Def:

Zwangsbedingungen:
 beschreiben eingeschränkte Bewegung Massepunkten
 Zwangskräfte.
 verursachen " " "

12. Lagrangeschen Gleichungen

• Erinnerung: System von N Massepunkten.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$$

$$= \underbrace{\mathbf{F}_i^{(a)}}_{\text{äußere}} + \sum_j \underbrace{\mathbf{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} \quad (8.1)$$

hier: $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{(1)}}_{\text{treibende Kräfte}} + \underbrace{\mathbf{F}_i^{(2)}}_{\text{Zwangskräfte}} \quad (12.1)$

NB: $i, j = 1 \dots N$ (ersehen v, μ Kap. 8)

• Problem: $\mathbf{F}_i^{(2)}$ „unbekannt“

Ziel: (i) Bestimme „eingeschränkte“ Bewegung ohne Kenntnis von $\mathbf{F}_i^{(2)}$ \rightarrow Physiker
 [\rightarrow Lagrange 2. Art]

(ii) Berechne $\mathbf{F}_i^{(2)}$ \rightarrow Ingenieure
 [\rightarrow Lagrange 1. Art]

• Zahl f der mech. Freiheitsgrade:

$$f = 3N - Z$$

f generalisierte Koord:

$3N$ Lagekoord.
 (z.B. Kartesisch)

Zahl der Zwangsbed.

beschreiben Dynamik
der N Massenpunkten.
eindeutig

12.1. Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

(i) holonome Zwangsbed.: (griech: holos = ganz, integrabel)

• integrale Darstellung:

Bindungsgl.:

$$\Phi^{(v)}(r_1, r_2, \dots, r_n, t) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, Z$$

... verknüpft $2N$ Ortskoord. (12.3)

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial t} = 0 \quad \dots \text{skleronom} \\ \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial t} \neq 0 \quad \dots \text{rheonom} \end{array}$$

• generalisierte Koord.: q_1, \dots, q_s

(i) mit $r_1 = r_1(q_1, \dots, q_s, t)$
 \vdots
 $r_N = r_N(q_1, \dots, q_s, t)$ (12.4)

(ii) erfüllen über (12.4) \rightarrow (12.3) $\forall q_1, \dots, q_s, t$

... „sind unabh. voneinander“

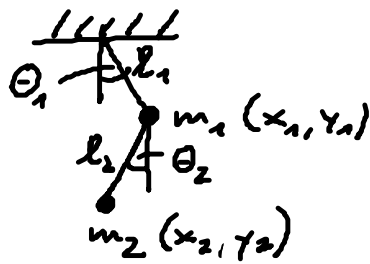
(iii) beschreiben Zustand eindeutig

(iv) spannen Konfigurationsraum

(v) nicht eindeutig

• Bsp. (1) Achterbahn: $\Phi^{(1)} = z - z(x) = 0$
 $q_1 = x$ oder s

(2) Doppel pendel:



$$\Phi^{(1)} = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

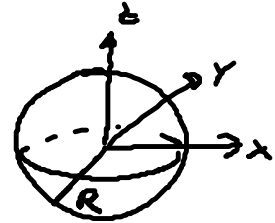
$$\Phi^{(2)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$q_1 = \Theta_1, \quad q_2 = \Theta_2$$

(3) Bewegung auf Kugeloberfläche:

$$\Phi^{(1)} = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$q_1 = \vartheta, \quad q_2 = \varphi \quad \text{.. Kugelkoord.}$$



(4) starrer Körper: $\Phi^{(ij)} = (x_i - x_j)^2 - d_{ij}^2 = 0$

• differentielle Darstellung: mit $\underline{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$
 $= (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

führe ein $\underline{\Phi}_k^{(v)} = \left(\frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial x_{k1}}, \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial x_{k2}}, \frac{\partial \Phi^{(v)}}{\partial x_{k3}} \right)$
 $\underline{\Phi}_{k1}^{(v)} \quad \dots$

Komp: $\Phi_{k\alpha}^{(v)}, \quad \alpha = 1, 2, 3$

differentielle Vernüchung der \underline{r}_k um $d\underline{r}_k, \quad k = 1, \dots, N$

müssen erfüllen: $\Phi^{(v)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1, \dots) = 0$

$$\rightarrow \boxed{d\Phi^{(v)} = \sum_{k=1}^N \underline{\Phi}_k^{(v)} \cdot d\underline{r}_k = 0} \quad (12.6)$$

$v = 1, \dots, Z$

$$\Phi^{(v)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1, \dots) - \Phi^{(v)}(\underline{r}_1, \dots)$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \Phi_{k\alpha}^{(v)} d x_{k\alpha}$$

Beachte: $\frac{\partial^2 \Phi^{(v)}}{\partial x_{i\alpha} \partial x_{k\beta}} = \boxed{\frac{\partial \Phi_{k\beta}^{(v)}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{\partial \Phi_{i\alpha}^{(v)}}{\partial x_{k\beta}}} \stackrel{(12.7)}{=} \frac{\partial^2 \Phi^{(v)}}{\partial x_{k\beta} \partial x_{i\alpha}}$

... Integrabilitätsbed.!

umgekehrt.

Geg: $\Phi_k^{(v)}$ mit (2.7) $\rightarrow \Phi^{(v)}$ existiert

[vgl. \underline{F} , $\text{rot } \underline{F} = 0 \rightarrow \underline{F} = \text{grad } U$]

(ii) anholonome Zwangsbed.: $\Phi^{(v)}(\dots) = 0$ existiert nicht
 „nicht integrierbar“ = anholonom

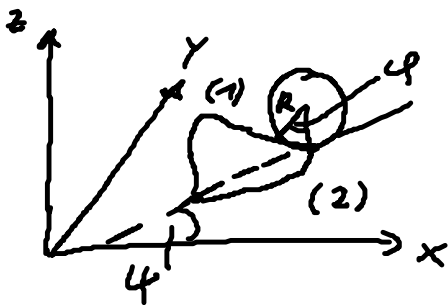
(1) Ungleichungen:

Bsp. Bewegung auf/abhalb Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$

(2) nur Einschränkung der Veränderungen im Infinitesimalen.

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \Phi_k^{(v)} \cdot dx_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \Phi_{k\beta}^{(v)}}{\partial x_{i\alpha}} \neq \frac{\partial \Phi_{i\alpha}^{(v)}}{\partial x_{k\beta}}} \quad (12.8)$$

Bsp. Abrollen einer Scheibe ohne „Schleif“



Konfig. der Scheibe
 Auflage ptt: x, y
 Orientierung: ψ
 Drehwinkel: φ

NB: $\underline{r}_k \rightarrow x, y, \psi, \varphi$

(i) holonome Zwangsbed: $\varphi = \varphi(x, y)$?

nein: Wege (1), (2) $\rightarrow \varphi$ ist wegeabhängig

(ii) anholonome Zwangsbed.

Gesdw. Schreibe: $v = R\dot{\varphi} \rightarrow ds = R d\varphi$ (*)

$$dx = ds \cos\varphi \quad (1')$$

$$dy = ds \sin\varphi \quad (2')$$

$$\left. \begin{array}{l} (1') \xrightarrow{(*)} 1 dx - R \cos\varphi d\varphi = 0 \quad (1) \\ (2') \xrightarrow{(*)} 1 dy - R \sin\varphi d\varphi = 0 \quad (2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ anholono-} \\ \text{me Zwangs-} \\ \text{bed.} \end{array}$$

vgl. mit (12.8): $\Phi_x^{(a)} = 1, \Phi_y^{(a)} = 0, \Phi_\varphi^{(a)} = -R \cos\varphi, \Phi_t^{(a)} = 0$

Integrabilität: $\frac{\partial \Phi_\varphi^{(a)}}{\partial y} = R \sin\varphi \neq \frac{\partial \Phi_y^{(a)}}{\partial \varphi} = 0$

\rightarrow kein $\Phi^{(a)}(x, y, \varphi, t) = 0!$

12.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

• hier: Statik, auch für Dynamik gültig

• Unte schreibe:

$d\mathbf{r}_i$... reale infinitesimale Verdrängungen,	$dt \neq 0$
$\delta\mathbf{r}_i$... virtuelle " " " " " "	$\delta t = 0$
	verträgliche mit Zwangsbed.	

wichtig für
 $\frac{\partial \Phi^{(a)}}{\partial t} \neq 0!$