· Wellengleichung:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0 \qquad (11.24)$$

ebener Wellenansatz: $\phi(x,t) = a\, e^{i(kx-\omega t)}$

$\longrightarrow \boxed{\omega = \pm c k}$ (11.29) … Dispersionsrelation

$\longrightarrow$ allg. Lsg. durch Superposition:

$$\boxed{\phi(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,a(k)\,e^{ik(x-ct)}}_{\text{nach rechts}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\,b(k)\,e^{ik(x+ct)}}_{\text{links}}} \qquad (11.31)$$

nach rechts / links

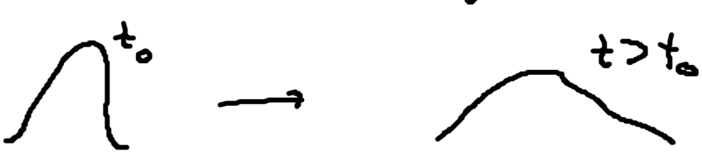
laufendes Wellenpaket: $f(x-ct)$ / $g(x+ct)$

· Wellen mit Dispersion: $\boxed{c = c(k)}$

Phasengeschw. einer Welle: $c = \dfrac{\omega(k)}{k}$ (11.33)

Annahme: $c = c(k)$ in Wellenpaket (11.31)

$\longrightarrow$ Paket zerfließt!



Bsp: a) EM-Wellen in Medium / Glasfaser!

b) QM: Welle eines freien Teilchens

z.B.: $\omega = \dfrac{\hbar k^2}{2m} \longrightarrow c = \dfrac{\hbar k}{2m}$

· eingespannte Saite: s. Übungen

III. Analytische Mechanik

• Motivation:

(i) Formalisierung der Newtonschen Mechanik

(ii) „elegantere" Lsg.wege für mechan. Probleme

$\longrightarrow$ Zwangsbed.

$\longrightarrow$ Zwangskräfte

$\Big\}$ $\longrightarrow$ Ingenieurwissenschaften

(iii) Formulierung der Quantenmechanik

(iv) Grundprinzipien zur Erkundung / Formulierung

(1) elementarer Wechselwirkung in der Natur

$\longrightarrow$ Integralprinzipien

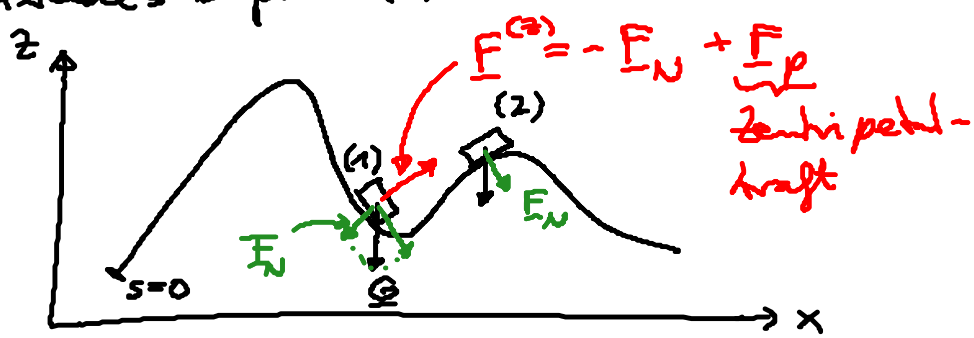
$\longrightarrow$ Extremal "

(2) Dynamik komplexer Materialien

• Lit.: (i) Goldstein

(ii) Sommerfeld

• illustrierendes Bsp. zu (ii): Achterbahn



- festgelegte 1D-Bahn in xz-Ebene:

$$z = z(x) \quad (*) \quad \text{... Zwangsbedingung}$$

- generalisierte Koord. zur Zeit t:

z.B. $x(t) \xrightarrow{(*)} z(t) = z(x(t))$

z.B. $s(t) \xrightarrow{(*)} x(t), z(t)$

- Zwangskräfte $\underline{F}^{(z)}$
- in (2): Wagen hebt nicht ab für $|\underline{F}_p| \ll |\underline{F}_N|$ $\Big\}$ konstruierender Ingenieur!

• **Def:**

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Zwangsbedingungen:} \\ \quad \text{beschreiben eingeschränkte Bewegung Massepkten} \\ \text{Zwangskräfte:} \\ \quad \text{verursachen} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}\end{array}}$

12. Lagrangeschen Gleichungen

• Erinnerung: System von N Massepktn.

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$$
$$= \underbrace{\underline{F}_i^{(a)}}_{\text{äußere}} + \underbrace{\sum_j \underline{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} \qquad (8.1)$$

hier: $$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i^{(t)}}_{\text{treibende Kräfte}} + \underbrace{\underline{F}_i^{(z)}}_{\text{Zwangs-kräfte}} \qquad (12.1)$$

NB: $i, j = 1 \ldots N$ (ersetzen ν, μ Kap. 8)

• Problem: $\underline{F}_i^{(z)}$ „unbekannt"

Ziel: (i) Bestimme „eingeschränkte" Bewegung ohne Kenntnis von $\underline{F}_i^{(z)}$ $\longrightarrow$ Physiker
[$\rightarrow$ Lagrange 2. Art]

(ii) Berechne $\underline{F}_i^{(z)}$ $\longrightarrow$ Ingenieure
[$\rightarrow$ Lagrange 1. Art]

• Zahl f der mechan. Freiheitsgrade:

$$\boxed{f = 3N - Z}$$

f generalisierte Koord.

$3N$ Lage-koord. (z.B. kartesische)

Zahl der Zwangsbed.

beschreiben Dynamik
der N Massenpktn.
eindeutig

12.1. Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

(i) **holonome Zwangsbed.:** (griech.: holos = ganz, integrabel)

- integrale Darstellung:

  Bindungsgl.: $\boxed{\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n, t) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots Z}$

  ... verknüpft 3N Ortskoord. (12.3)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} = 0 & \dots \text{ skleronom} \\ \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} \neq 0 & \dots \text{ rheonom} \end{array}}$$

- generalisierte Koord.: $q_1 \dots, q_S$

  (i) mit $\underline{r}_1 = \underline{r}_1(q_1, \dots, q_S, t)$

  $\vdots$ (12.4)

  $\underline{r}_N = \underline{r}_N(q_1, \dots, q_S, t)$

  (ii) erfüllen über (12.4) → (12.3) $\forall\, q_1, \dots, q_S, t$

  ... „sind unabh. voneinander"

  (iii) beschreiben Zustand eindeutig

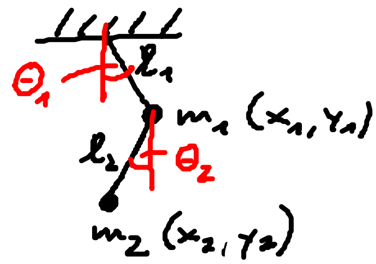
  (iv) spannen Konfigurationsraum

  (v) nicht eindeutig

- Bsp.: (1) Achterbahn: $\phi^{(1)} = z - z(x) = 0$

  $q_1 = x$ oder s

(2) Doppelpendel:

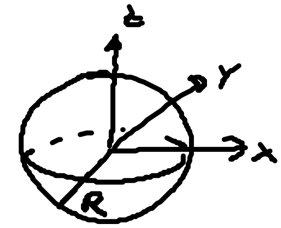


$$\phi^{(1)} = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$\phi^{(2)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$q_1 = \Theta_1\ ,\quad q_2 = \Theta_2$$

(3) Bewegung auf Kugeloberfläche:



$$\phi^{(1)} = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

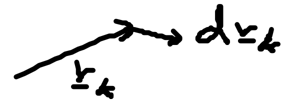
$$q_1 = \vartheta,\quad q_2 = \varphi \quad \text{.. Kugelkoord.}$$

(4) starrer Körper: $\phi^{(ij)} = (\underline{r}_i - \underline{r}_j)^2 - d_{ij}^2 = 0$

- differentielle Darstellung: mit $\underline{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$
  $= (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

führe ein $\underline{\Phi}_k^{(\nu)} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k1}}}_{\Phi_{k1}^{(\nu)}}, \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k2}}, \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k3}}\Big)$ .... Komp: $\Phi_{k\alpha}^{(\nu)}$, $\alpha = 1,2,3$

differentielle Verrückung der $\underline{r}_k$ um $d\underline{r}_k$, $k = 1, .., N$



müssen erfüllen: $\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1, \ldots) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{d\phi^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot d\underline{r}_k = 0} \qquad (12.6)$$

$\nu = 1, \ldots, z$

$\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1 \ldots) - \phi^{(\nu)}(\underline{r}_1, \ldots)$

$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \Phi_{k\alpha}^{\nu}\, dx_{k\alpha}$

Beachte: $\frac{\partial^2 \phi^{\nu}}{\partial x_{i\alpha}\partial x_{k\beta}} = \boxed{\frac{\partial \Phi^{(\nu)}_{k\beta}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{\partial \Phi^{(\nu)}_{i\alpha}}{\partial x_{k\beta}}} = \frac{\partial^2 \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k\beta}\partial x_{i\alpha}}$ (12.7)

... Integrabilitätsbed.!

umgekehrt:

Geg: $\underline{\Phi}^{(\nu)}_k$ mit (12.7) $\longrightarrow$ $\phi^{(\nu)}$ existiert

[vgl. $\underline{F}$, rot $\underline{F} = 0 \longrightarrow \underline{F} = -\mathrm{grad}\, U$]

(ii) anholonome Zwangsbed.: $\phi^{(\nu)}(\ldots) = 0$ existiert nicht

„nicht integrierbar" = anholonom

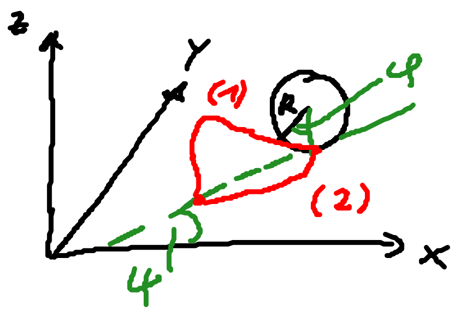
(1) Ungleichungen:

Bsp. Bewegung außerhalb Kugel: $x^2+y^2+z^2-R^2 \geq 0$

(2) nur Einschränkung der Veränderungen im Infinitesimalen:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}^{(\nu)}_k \cdot d\underline{r}_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \Phi^{(\nu)}_{k\beta}}{\partial x_{i\alpha}} \neq \frac{\partial \Phi^{(\nu)}_{i\alpha}}{\partial x_{k\beta}}} \qquad (12.8)$$

Bsp.: Abrollen einer Scheibe ohne „Schlupf"



Konfig. der Scheibe
Auflagepkt.: x, y
Orientierung: ψ
Drehwinkel: φ

NB: $\underline{r}_k \longrightarrow x, y, \psi, \varphi$

(i) holonome Zwangsbed.: $\varphi = \varphi(x,y)$?

nein: Wege (1), (2) $\longrightarrow$ φ ist wegabhängig

(ii) anholonome Zwangsbed.:

Geschw. Scheibe: $v = R\dot{\varphi} \longrightarrow ds = R\,d\varphi$ (*)

$$dx = ds\cos\vartheta \quad (1')$$
$$dy = ds\sin\vartheta \quad (2')$$

$$\left.\begin{aligned} (1') \xrightarrow{(*)} \quad 1\,dx - R\cos\vartheta\,d\varphi &= 0 \quad (1) \\ (2') \xrightarrow{(*)} \quad 1\,dy - R\sin\vartheta\,d\varphi &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{2 anholonome Zwangsbed.}$$

vgl. mit (12.8): $\Phi_x^{(1)} = 1,\ \Phi_y^{(1)} = 0,\ \Phi_\varphi^{(1)} = -R\cos\vartheta,\ \Phi_\vartheta^{(1)} = 0$

Integrabilität: $\dfrac{\partial\Phi_\varphi^{(1)}}{\partial\vartheta} = R\sin\vartheta \neq \dfrac{\partial\Phi_\vartheta^{(1)}}{\partial\varphi} = 0$

$\longrightarrow$ kein $\Phi^{(1)}(x,y,\varphi,\vartheta) = 0$!

12.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

- hier: Statik, auch für Dynamik gültig
- Unterscheide:

$d\underline{r}_i$ ... reale infinitesimale Veränderungen, $dt \neq 0$

$\delta\underline{r}_i$ ... virtuelle " " , $\delta t = 0$

verträgliche mit Zwangsbed.

wichtig für $\dfrac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial t} \neq 0$!