

12.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

• hier: Statik, Dynamik später

• Unterscheide:

dr_i ... reale infinitesimale Verrückung, $dt \neq 0$
 δr_i ... virtuelle verträglich mit Zwangsbed. " , $\delta t = 0$

↳ Teste System aus!

↑ wichtig für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$

• System im GG:

$$(12.9) \rightarrow \underline{F}_i = \underline{F}_i^{(H)} + \underline{F}_i^{(Z)} = 0, \quad i = 1 \dots N \quad (12.9)$$

→ virtuelle Arbeit durch δr_i :

$$\delta A = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta r_i = \sum_i \underline{F}_i^{(H)} \cdot \delta r_i + \sum_i \underline{F}_i^{(Z)} \cdot \delta r_i = 0 \quad (12.10)$$

• Sommerfeld:

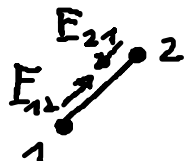
Postulat:

„Bei jedem glatt geführten mechan. System ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null“

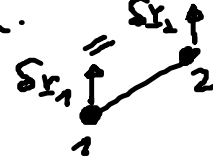
$$\sum_i \underline{F}_i^{(Z)} \cdot \delta r_i = 0 \quad (12.11)$$

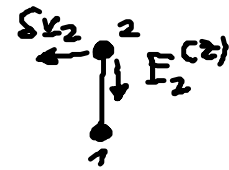
Goldstein: Beschränkung auf Systeme mit (12.11)

• Bsp: (i) starrer Körper:



$$\underline{F}_1^{(Z)} = \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = -\underline{F}_2^{(Z)} \quad (\text{actio=reactio})$$

(1) Translation:  (12.11) $\rightarrow E_1^{(z)} \delta r_1 + E_2^{(z)} \delta r_2$
 $= \underbrace{(F_1^{(z)} + F_2^{(z)})}_{=0} \delta r_1 = 0$

(2) Rotation:  $E_2^{(z)} \cdot \delta r_2 = 0, F_2^{(z)} \perp \delta r_2$

(ii) Achterbahn: $F^{(z)} \perp \delta r$

• also: Prinzip der virtuellen Arbeit

(12.10) mit (12.11) $\boxed{\sum_i E_i^{(z)} \cdot \delta r_i = 0}$ (12.12)

... virtuelle Arbeit der "treibenden"
Kräfte verschwindet

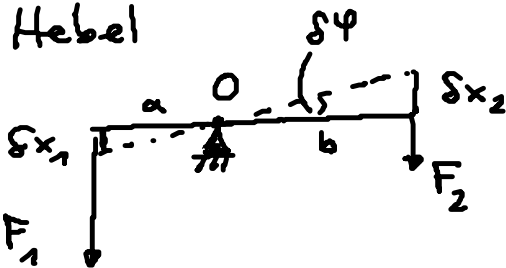
• Bemerkungen:

(i) (12.12) bestimmt die gesamte Statik!

(ii) Haftreibungskräfte = $F^{(z)}$

Gleit " " = $F^{(t)}$

• Bsp: Hebel



GG? (12.12) \rightarrow
 $F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 = 0$
 $a \delta \varphi \quad -b \delta \varphi$

$\rightarrow (F_1 a - F_2 b) \delta \varphi = 0$

$\rightarrow F_1 a = F_2 b$ (12.13)

$\hat{=}$ GG der Drehmomente um O

12.3 Das d'Alembertsche Prinzip

• Ziel: erweitere (12.12) auf Dynamik

• Kunstgriff:

Newton: $\underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\underline{F}^*}$

... d'Alembertsche Trägheitskraft / -widerstand

(i) fiktive Kraft

(ii) Scheinkräfte [vgl. (7.3)]

→ z.B. Zentrifugalkraft (Achtkern!)

• virtuelle Arbeit:

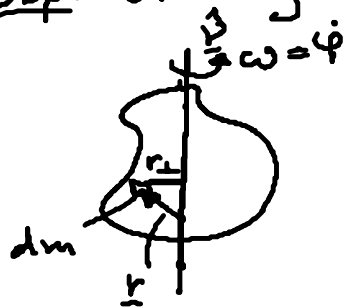
$$\sum_i (\underbrace{\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{=0}) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \& \quad \underbrace{\sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i}_{\text{soll weiterhin gelten!}} = 0$$

$$\overbrace{\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)}}^{\rightarrow}$$

$$\boxed{\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \quad (12.15)$$

... d'Alembertsches Prinzip (Differentialprinzip)

• Bsp: Drehung eines starren Körpers um feste Achse



i.f. $\sum_i \rightarrow \int$

$$(1) \int \underbrace{d\underline{F}^{(t)} \cdot \delta \underline{r}}_{\substack{d\underline{F}^{(t)} \parallel \delta \underline{r}! \\ \text{Rest } d\underline{F}^{(z)}}} = \int dF^{(t)} \underbrace{\frac{\delta r}{r}}_{\substack{\delta \varphi \\ \text{ges. treibendes} \\ \text{Drehmoment}}} = \overset{\delta \varphi}{\uparrow} \delta \varphi$$

$$(2) \int dm \ddot{\underline{r}} \cdot \delta \underline{r} = \int dm \underbrace{\dot{\underline{v}} \cdot \delta \underline{r}}_{\substack{r \dot{\omega} \\ r \delta \varphi}} = \delta \varphi \dot{\omega} \ominus$$

$$\text{mit } \boxed{\ominus = \int dm r_{\perp}^2 \stackrel{(10.26)}{=} \hat{\underline{v}} \cdot \underline{\Theta} \hat{\underline{v}}} \quad (12.16)$$

... Trägheitsmoment um $\hat{\underline{v}}$!

$$(12.15) \rightarrow (1) - (2) = 0$$

$$\rightarrow (D^z - \Theta \dot{\omega}) \delta \varphi = 0$$

$$\rightarrow \boxed{D^z = \Theta \dot{\omega}}$$

$$\underline{D} \cdot \underline{\dot{\varphi}} \quad \underline{L} \cdot \underline{\dot{\varphi}}$$

also: Zwangs drehmomente $\underline{D}^{(z)} \perp \underline{\dot{\varphi}}$ wegen
 $\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega} \parallel \underline{\dot{\varphi}}$ tauchen hier nicht auf

[vgl. Kap. 10.3 f): $\underline{D}^{(z)}$ durch Lagerkräfte]

12.4 Lagrange'sche Gleichungen 1. Art

• d'Alembert \rightarrow D Gln. für r_k & Zugang zu Zwangskräften
 • Es gilt: (1) $\sum_{k=1}^N (F_k^{(t)} - m \ddot{r}_k) \cdot \delta r_k = 0$ (12.15)

$$(2) \sum_{k=1}^N \Phi_k^{(\omega)} \cdot \delta r_k = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, Z \quad (12.16)$$

δr_k mit Komp $\delta x_{k\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$

also: $3N$ Verschiebungen $\delta x_{k\alpha}$ sind nur
 $f = 3N - Z$ unabhängig

• Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren λ_ν :

$$(1) + \sum_{\nu=1}^Z \lambda_\nu (2) = 0$$

↑ beliebige Faktoren $\lambda_\nu(t)$

$$\rightarrow \sum_{k=1}^N \left(\underline{F}_k^{(t)} - m \ddot{\underline{r}}_k + \sum_{\nu=1}^z \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \right) \cdot \delta \underline{r}_k = 0 \quad (12.18)$$

\underline{V}_k mit Komp. $V_{k\alpha}$, $\alpha=1,2,3$

(i) Wähle für z Verschiebungen $\delta x_{\alpha\alpha}$ die $\lambda_\nu(t)$ so, dass $V_{k\alpha} = 0$

(ii) die restlichen $3N - z = f$ Verschiebungen $\delta x_{\beta\beta}$ sind frei

$$\underline{V}_{k\alpha} = 0 \rightarrow \boxed{m \ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \sum_{\nu=1}^z \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}, \quad k=1,2,\dots,N} \quad (12.19)$$

... Lagrange'sche Gln. 1. Art

$$\& \boxed{\sum_{k=1}^N \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \dot{\underline{r}}_k = 0, \quad \nu=1,\dots,z} \quad (12.20)$$

... Bindungsgln.

also: $3N + z$ Dgln für $3N + z$ Variablen \underline{r}_k, λ

• Lösungsweg:

(1) Bestimme z Multiplikatoren λ_ν aus z Gln. von (12.19)

(2) Einsetzen der λ_ν in restlichen $3N - z$ Gln.

& z Gln von (12.20)

$\rightarrow 3N$ Dgln. für \underline{r}_k

• Zwangskräfte: vgl. (12.19) mit $m \ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \underline{F}_k^{(z)}$ (12.1)

$$\rightarrow \boxed{\underline{F}_k^{(z)} = \sum_{\nu=1}^z \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}, \quad k=1,\dots,N}$$

also: $\lambda_\nu(t) \rightarrow \underline{F}_k^{(z)}$!

• Bsp: Seilmaschine von Atwood