12.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

· hier: Statik, Dynamik später

· Unterscheide:

$$\boxed{\begin{array}{l} d\underline{r}_i \ \dots \ \text{reale infinitesimale Verrückung}, \ dt \neq 0 \\ \delta \underline{r}_i \ \dots \ \text{virtuelle} \ \text{„} \ \text{verträglich mit Zwangsbed.} \ \text{„}, \ \delta t = 0 \end{array}}$$

Teste System aus!

wichtig für $\frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} \neq 0$

· System im GG:

$$(12.1) \longrightarrow \underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = 0 , \quad i = 1 \dots N \qquad (12.9)$$

$\longrightarrow$ <u>virtuelle Arbeit</u> durch $\delta \underline{r}_i$:

$$\delta A = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i + \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (12.10)$$

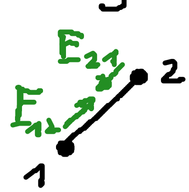
· Sommerfeld:

Postulat: „Bei jedem glatt geführten mechan. System ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null"

$$\sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \qquad (12.11)$$

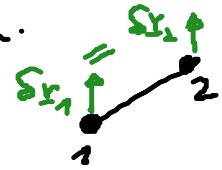
Goldstein: Beschränkung auf Systeme mit (12.11)

· Bsp: (i) starrer Körper:



$$\underline{F}_1^{(z)} = \underline{F}_{12} = - \underline{F}_{21} = - \underline{F}_2^{(z)} \quad \text{(actio = reactio)}$$

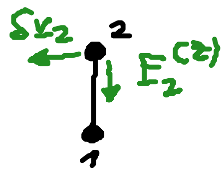
(1) Translation:



(12.11) $\longrightarrow$ $\underline{F}_1^{(z)} \delta \underline{r}_1 + \underline{F}_2^{(z)} \delta \underline{r}_2$

$$= \underbrace{(\underline{F}_1^{(z)} + \underline{F}_2^{(z)})}_{=0} \delta \underline{r}_1 = 0$$

(2) Rotation:



$\underline{F}_2^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_2 = 0$, $\underline{F}_2^{(z)} \perp \delta \underline{r}_2$

(ii) Achterbahn: $\underline{F}^{(z)} \perp \delta \underline{r}$

• also: Prinzip der virtuelle Arbeit

(12.10) mit (12.11)

$$\boxed{\sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \qquad (12.12)$$

... virtuelle Arbeit der „treibenden" Kräfte verschwindet

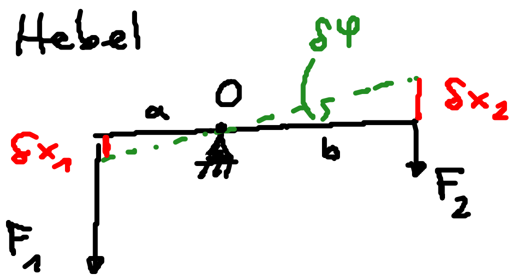
• Bemerkungen:

(i) (12.12) bestimmt die gesamte Statik!

(ii) Haftreibungskräfte = $\underline{F}^{(z)}$

Gleit " " = $\underline{F}^{(t)}$

• Bsp: Hebel



GG? (12.12) $\longrightarrow$

$$F_1 \underbrace{\delta x_1}_{a\,\delta\varphi} + F_2 \underbrace{\delta x_2}_{-b\,\delta\varphi} = 0$$

$\longrightarrow (F_1 a - F_2 b)\, \delta\varphi = 0$

$\longrightarrow \quad F_1 a = F_2 b \qquad (12.13)$

$\hat{=}$ GG der Drehmomente um 0 ✓

12.3 Das d'Alembertsche Prinzip

• Ziel: erweitere (12.12) auf Dynamik

- Kunstgriff:

Newton: $\underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i = -\underline{F}^*}$

... d'Alembertsche Trägheitskraft/-widerstand

(i) fiktive Kraft
(ii) Scheinkräfte [vgl (7.3)]

→ z.B. Zentrifugalkraft (Achterbahn!)

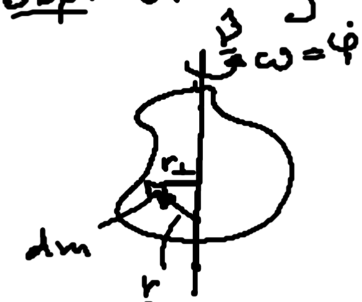
- virtuelle Arbeit:

$$\sum_i \underbrace{(\underline{F}_i - m_i\ddot{\underline{r}}_i)}_{=0}\cdot\delta\underline{r}_i = 0 \quad \& \quad \underbrace{\sum_i \underline{F}_i^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_i = 0}_{\text{soll weiterhin gelten!}}$$

$$\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} \longrightarrow \boxed{\sum_i \left(\underline{F}_i^{(t)} - m_i\ddot{\underline{r}}_i\right)\cdot\delta\underline{r}_i = 0} \quad (12.15)$$

... d'Alembertsches Prinzip (Differentialprinzip)

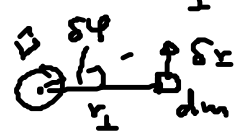
- Bsp: Drehung eines starren Körpers um feste Achse



i.f. $\sum_i \to \int$

(1) $\int \underbrace{d\underline{F}^{(t)}\cdot\delta\underline{r}}_{} = \int dF^{(t)} \underbrace{\delta r}_{r_\perp d\varphi} = D^t\,\delta\varphi$

$d\underline{F}^{(t)} \parallel \delta\underline{r}$!
Rest $d\underline{F}^{(z)}$



ges. treibendes Drehmoment

(2) $\int dm\,\ddot{\underline{r}}\cdot\delta\underline{r} = \int dm\,\underbrace{\dot v}_{r_\perp\dot\omega}\,\underbrace{\delta r}_{r_\perp\delta\varphi} = \delta\varphi\,\dot\omega\,\Theta$

mit $\boxed{\Theta = \int dm\, r_\perp^2 \overset{(10.26)}{=} \hat{\underline{\nu}}\cdot\underline{\underline{\Theta}}\,\hat{\underline{\nu}}}$ (12.16)

... Trägheitsmoment um $\hat{\underline{\nu}}$!

(12.15) ⟶ (1) − (2) = 0

$$\rightarrow \quad (D^t - \Theta\dot{\omega})\,\delta\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{D^t = \Theta\,\dot{\omega}}$$

$$\underline{D}\cdot\hat{\underline{\nu}} \qquad\qquad \dot{\underline{L}}\cdot\hat{\underline{\nu}}$$

also: Zwangsdrehmomente $\underline{D}^{(z)} \perp \hat{\underline{\nu}}$ wegen

$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \parallel \hat{\underline{\nu}}$ tauchen hier nicht auf

[vgl. Kap. 10.3 f): $\underline{D}^{(z)}$ durch Lagerkräfte]

12.4 Lagrangesche Gleichungen 1. Art

- d'Alembert $\longrightarrow$ DGln. für $\underline{r}_k$ & Zugang zu Zwangskräften
- Es galt: (1) $\sum_{k=1}^{N} (\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k)\cdot\delta\underline{r}_k = 0$ (12.15)

 (2) $\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\cdot\delta\underline{r}_k = 0$, $\nu = 1, 2, \dots Z$ (12.16)

 $\delta\underline{r}_k$ mit Komp $\delta x_{k\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$

 also: $3N$ Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ sind nur $f = 3N - Z$ unabhängig

- Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren λ_ν :

$$(1) + \sum_{\nu=1}^{Z} \lambda_\nu\,(2) = 0$$

beliebige Faktoren $\lambda_\nu(t)$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\Big(\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\Big)}_{\underline{V}_k \text{ mit Komp. } V_{k\alpha}\,,\ \alpha=1,2,3} \cdot \delta \underline{r}_k = 0 \qquad (12.18)$$

(i) Wähle für z Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ die $\lambda_\nu(t)$ so, daß $V_{k\alpha}=0$

(ii) die restlichen $3N-z=f$ Verrückungen $\delta x_{\ell\beta}$ sind frei

$$\xrightarrow{V_{k\alpha}=0} \quad \boxed{m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\,,\quad k=1,2,.,N} \qquad (12.19)$$

... Lagrangesche Gln. 1. Art

$$\& \quad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \dot{\underline{r}}_k = 0\,,\quad \nu=1,\dots,z} \qquad (12.20)$$

... Bindungsgln.

also: $3N+z$ DGln für $3N+z$ Variablen $\underline{r}_k, \lambda$

- Lösungsweg:
  (1) Bestimme z Multiplikatoren λ_ν aus z Gln. von (12.19)
  (2) Einsetzen der λ_ν in restliche $3N-z$ Gln. & z Gln von (12.20)

$$\longrightarrow 3N \text{ DGln. für } \underline{r}_k$$

- Zwangskräfte: vgl. (12.19) mit $m\ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \underline{F}_k^{(z)}$ (12.1)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_k^{(z)} = \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\,,\quad k=1,..,N}$$

also: $\lambda_\nu(t) \longrightarrow \underline{F}_k^{(z)}$!

- **Bsp:** Seilmaschine von Atwood