

12.5 Lagrange'sche Gleichungen 2. Art

• generalisierte Koord.: q_1, \dots, q_s , $f = 3N - Z$

$$\longrightarrow \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_s, t) \quad (12.4)$$

• Ziel: Beschreibe Dynamik der $q_1, \dots, q_s \xrightarrow{(12.4)} \underline{r}_i(t)$

kein Zugang zu Zwangskräften

• Hilfsformeln: (i) $\dot{\underline{r}}_i \stackrel{(12.4)}{=} \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \quad (12.22)$

$$(ii) \delta \underline{r}_i = \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta t = 0 \quad (12.23)$$

• d'Alembert: $\sum_i (\underline{F}_i^{(H)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad (12.15)$

$$(i) \sum_i \underline{F}_i^{(H)} \cdot \delta \underline{r}_i \stackrel{(12.23)}{=} \sum_j \underbrace{\sum_i \underline{F}_i^{(H)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_i \underline{F}_i^{(H)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \quad (12.25)$$

... generalisierte Kraft

$$(ii) \sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \delta \underline{r}_i \stackrel{(12.23)}{=} \sum_j \underbrace{\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}}_{\dots} \delta q_j$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ & \stackrel{(12.22)}{=} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d}{dt} \underline{r}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \right) - m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\dots) = \frac{\partial}{\partial t} \dots + \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \dots \dot{q}_j$$

$$= \sum_i \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{r}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \dot{r}_i \right\} \delta q_j$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right)$$

mit $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$

... kinetische Energie

$$\rightarrow \sum_i m_i \dot{r}_i \cdot \delta r_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \delta q_j$$

(12.15) (i) - (ii) = 0

$$\rightarrow \sum_j \left\{ Q_j - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = 0$$

alle unabhängig voneinander:
holonome Bindung!
 $\delta q_k \neq 0, \delta q_j = 0, j \neq k$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (12.26)$$

... Lagrange'sche Gln. 2. Art (im allgemeinen)

Sonderfälle

a) konservative Systeme:

wichtig!!

$$\underline{F_i^{(H)} = -\nabla_i U} \quad (12.27)$$

mit $U = U(r_1, \dots, r_n)$

$= U(r_1(\dots, q_j, \dots, t) \dots r_n(\dots))$

damit: $Q_j \stackrel{(12.25)}{=} \sum_i F_i^{(H)} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$

$$\rightarrow \underline{Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}} \quad (12.28)$$

also: (12.26) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (12.29)$$

mit $L = T - U$ (12.30) ... Lagrange'sche Gln. (2. Art, im speziellen)
 ... Lagrange Funktion

• Bsp 1. Teilchen in 3D. $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow q_j = x_j, j=1,2,3$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} L = T - U$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} = F_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j$$

$$\xrightarrow{(12.29)} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \rightarrow m \ddot{x}_j = F_j \quad \checkmark$$

• Bsp 2: Perle im rotierenden Drahtring (ohne Reibung)

(i) generalisierte Koord.: φ
 (ii) Geschw. Komp: $r\dot{\varphi}$ an Ring & $\omega r \sin \varphi$ rot. Ring
 $\rightarrow T = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi)$
 (iii) $U = mgz = -mgr \cos \varphi$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= T - U \\ &= \frac{m}{2} r^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi) + mgr \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv) Bewgl.: } \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m r^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgr \sin \varphi \\ &= m r (\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr \left[\underbrace{r \ddot{\varphi}}_{\text{Beschl. umm}} - \underbrace{(r\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi)}_{\text{Komp. Zentrifugalbeschl.}} - \underbrace{g \sin\varphi}_{\text{Erdbeschl.}} \right] = 0$$

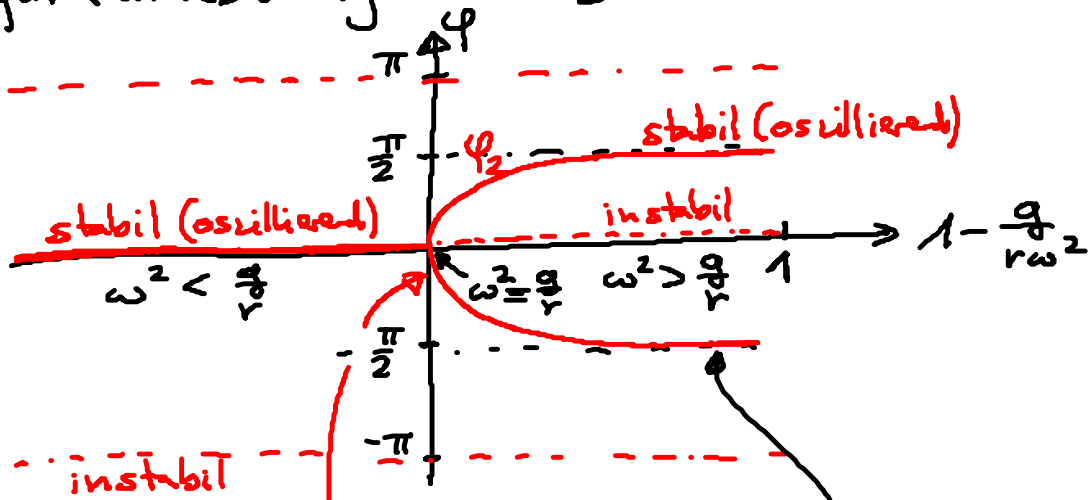
|| Ring

(v) Diskussion:

1. Stationäre Lsg: $\dot{\varphi} = 0 \rightarrow \ddot{\varphi} = 0 \rightarrow \sin\varphi = 0 \rightarrow \varphi_1 = 0, 180^\circ$
 $\cos\varphi_2 = \frac{g}{r\omega^2}$

2. Verhalten gegen Störungen: [s. Übungen]

3. Bifurkationsdiagramm: für stationäre Lsg.



$$\cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2} = \frac{g}{r\omega^2}$$

$$\rightarrow \varphi_2 = \pm \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{g}{r\omega^2}} !$$

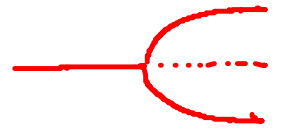
Zentrifugalbeschl. treibt die Kugel aus $\varphi=0$ heraus!

$\hat{=}$ Bifurkation der $\varphi=0$ Lsg in zwei gleichwertige Lsg. (Symmetriebrechung!)

NB: Bifurkation = qualitative Änderung des Lsg. eines Systems von Dgl. bei Durchschreiten eines Parameters!
 \rightarrow dynamische Systeme

Charakt. Bifurkationstypen:

1D: (i) Pitchfork (Mist-gabel) - Bifurkation



(ii) Saddle-node (Sattel-Knoten) - Bifurkation



„Annullierung“
von stabilem und
instabilem Fixpt.

(iii) Transcritical (transkritische) Bifurkation



2D: z.B. Hopf - Bifurkation



Grenzyklus
oszillierende
Lsg

von „Normalformen“