

b) generalisiertes / geschwindigkeitsabhängiges Potential W :

• Annahme: $W = W(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ existiert
mit $Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}$ (12.31)

(12.26)
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (12.32)
 $L = T - W$

• Bsp: geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

- Lorentz kraft: $\underline{F} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$ (12.33)

↑ ↑ ↑ ↑
Ladung elektr. Geschw. Magnetfeld
 Feld \underline{v}

- O.B.:

$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$
 $\underline{E} = -\underline{\nabla} \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}$ (12.34)

$\varphi(r, t) \dots$ skalare Potential
 $\underline{A}(r, t) \dots$ Vektor "

Q2.34) in (12.33) $\vec{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + \underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) \right]$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$

(i) $\underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\underline{v} \cdot \underline{A}) - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{A}$

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{A} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} + \left(\dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \underline{A}$

$\stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} \underline{A}$... Änderungen, die Teile von $\underline{A}(\underline{x}(t), t)$ sieht!

$\rightarrow \vec{F} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{d}{dt} \underline{A} + \nabla(\underline{v} \cdot \underline{A}) \right]$

$\rightarrow F_i = q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi - \underline{v} \cdot \underline{A}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} (\underline{A} \cdot \underline{v} - \varphi) \right]$ $\frac{\partial \varphi}{\partial v_i} = 0!$

$\underline{v}_i = \dot{x}_i$

$F_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}$ (12.35)

mit $W = q(\varphi - \underline{A} \cdot \underline{v})$

also $L = T - q\varphi + q \underline{A} \cdot \underline{v}$ (12.36)

c) Reibungskräfte

• Aufteilung der Kräfte: $\underline{F}_i^{(R)} = \text{kons. Kraft} + \text{Rest}$
 $\hookrightarrow L = T - U$

$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$ (12.37)

• Reibungskraft:

linearer Ansatz: $F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta}$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3$

Bsp: Stokes'sche Reibung für Kugel: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma \delta_{\alpha\beta}$

$\rightarrow F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma \dot{x}_{i\alpha}$

• Rayleighsche Dissipations fkt.

$$\underline{F}_i^{(R)} \parallel \underline{r}_i$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\alpha} \dot{x}_{i\beta}, \quad \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma_{\beta\alpha}^{(i)} \quad (12.39)$$

$$\rightarrow \underline{F}_{i\alpha}^{(R)} = - \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = - \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta} \quad (12.40)$$

Bsp: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma \delta_{\alpha\beta}$ $W = \frac{1}{2} \sum_i \gamma \underbrace{\dot{x}_{i\alpha}^2}_{v_i^2}$ $\underline{F}_{i\alpha}^{(R)} = - \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = - \gamma \dot{x}_{i\alpha}$ ✓

• physikal. Interpretation:

$$- \sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \underline{r}_i \stackrel{(12.40)}{=} \sum_i \dot{x}_{i\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta} \stackrel{(12.39)}{=} 2W$$

$2W$... die von den Reibungskräften
dissipierte Leistung (12.41)

• generalisierte Kräfte:

$$Q_j \stackrel{(12.25)}{=} \sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{(12.40)}{=} - \sum_i \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{x}_{i\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \quad [\text{vgl. (12.22)}]$$

$$Q_j = - \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \quad (12.42)$$

„generalisierte Geschw.“

• Euler-Lagrange-Gln:

$$(12.37) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (12.43)$$

„Reibung“

[Forsdy: A.U. I für d.H.S. Phys. Rev. Lett 103, 199801 (2009)]

13. Das Hamiltonsche Prinzip

- bisher. d'Alembertes Prinzip $\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \underline{\ddot{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$
 \rightarrow Differentialprinzip: $\delta \underline{r}_i$ zur Zeit t
- jetzt. Integralprinzip: virtuelle Verschiebung der gesamten Bahn
 & Extremalprinzip

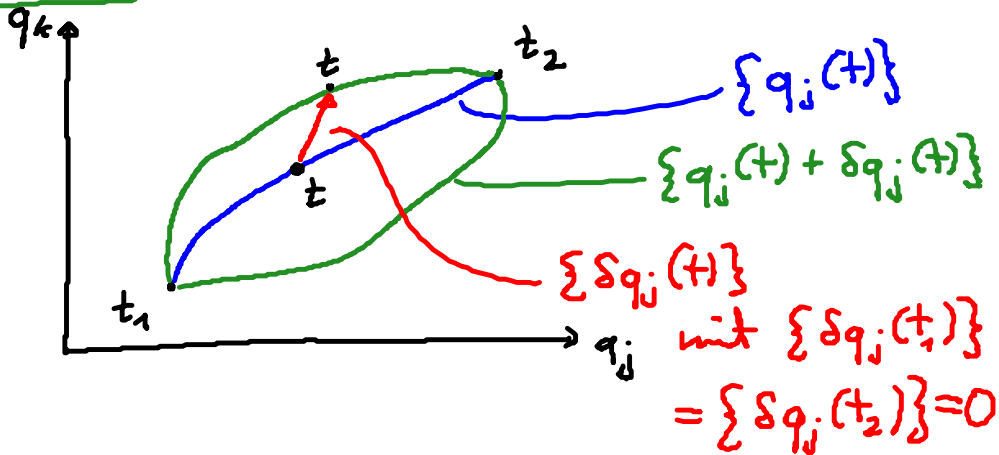
Mechanik, Elektromagnetismus, komplexe Matrizen,
 Rel. Theorie, fundamentale Gesetze der Natur

13.1 Hamiltonsches Prinzip („der kleinsten Wirkung“)

- mechan. System: f generalisierte, voneinander unabhängige Koord.
 $q_1(t) \dots q_s(t) = \{q_j(t)\}$ (13.1)

- physikal. / virtuelle Bahnen:

2D-Schnitt des Konfigurationsraumes



- Hamiltonsches Prinzip:

Die physikal. Bahn eines Systems zwischen $\{q_j(t_1)\}$ und $\{q_j(t_2)\}$ im Konfigurationsraum ist durch ein Extremum der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt$ (13.2) ausgezeichnet:
 $\delta S = 0$
 „Variation von S “

L heißt Lagrange-Fktn.

Bem.: (i) $\delta S =$ Änderung von S bei $\{q_j(t)\}$
 $\rightarrow \{q_j(t) + \delta q_j(t)\}$

(ii) Extremum: $\delta S = 0$
Minimum oder Maximum!

(iii) Einheit von S : Energie \times Zeit

• konservative Kräfte / generalisiertes Potential U :

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

Beh:

$$L = T - U$$

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$$

... Lagrange-Gln. (2. Art) [vgl. (12.29), (12.32)]

Beweis: Kap. 13.3

• fundamentale Ww in der Natur:

1. Gravitation
2. EM-Ww
3. schwache Ww (Neutrinos)
4. starke Ww (Kernkräfte)

} herleitbar
über Hamiltonsches Prinzip
+ L

13.2 Eulersche Variationsrechnung

• 10-Fall: Variationsproblem

Geg: Funktion $y(x)$
Funktional $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) dx \quad (13.4)$

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$