

13.2 Eulersche Variationsrechnung

• 10-Fall: Variationsproblem:

Geg: Fkt. $y(x)$

$$\text{Funktional } F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \quad (13.4)$$

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so dass $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$

• diskretisierte Version:

(i) zur Verdeutlichung

(ii) Vorgehen in der Numerik

$\overset{\Delta x}{\text{---}} \xrightarrow{x} x_1 = x^{(1)} \quad x_2 = x^{(2)} \quad \dots \quad x_n = x^{(n)} \quad \dots \text{ Stützstellen}$

$$y(x^{(i)}) \longrightarrow y_i$$

$$y'(x^{(i)}) \longrightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

$$f(y, y', x) \longrightarrow f(y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, x^{(i)})$$

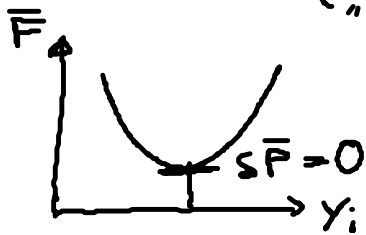
$$\int \dots dx \longrightarrow \sum_i \dots \Delta x$$

$$F[y(x)] \longrightarrow \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$$

Variation von \bar{F} : $\delta \bar{F} = \bar{F}(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$
 $\approx \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \delta y_i \quad (13.5)$

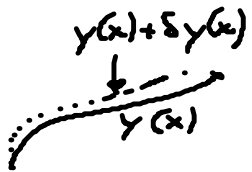
Extremum von \bar{F} : $\delta \bar{F} = 0$, beliebiges $\delta y_i \iff \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = 0 \quad (13.6)$

(„horizontale Tangente“)



• kontinuierliche Version:

Variation von F :



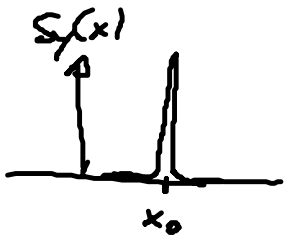
$$\delta F = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)] \quad (13.7)$$
$$\stackrel{!}{=} \int \frac{\delta F}{\delta y(x)} \delta y(x) dx$$

• Funktional-
ableitung!

Vgl. mit (13.5): (i) $\sum_i \rightarrow \int \dots dx$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y_i} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

Extremum von F :



$$\delta F = 0, \text{ beliebiges } \delta y(x) \quad (13.8)$$
$$\rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0$$

\rightarrow Ges: $\frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

• Durchführung der Variation für (13.4)

$$\delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (13.9) \quad [\delta x = 0!]$$

wichtige Schritte:

$$(i) \delta y' = \delta \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta y(x+\varepsilon) - \delta y(x)}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y(x)} \quad (13.10)$$

$$(ii) \text{ in (13.9): } \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x) dx$$

mit (13.10)

$$\text{part.} \\ \text{Integ} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \right] - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) \right\} dx \quad (13.11)$$
$$\underbrace{\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0}$$

weil $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\rightarrow \delta F \stackrel{(13.11)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y(x) dx \quad (13.12)$$

$\frac{\delta F}{\delta y(x)} \quad !! \text{ in (13.7)}$

vgl. mit
(13.7)

$$\boxed{\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}} \quad (13.13)$$

$$\boxed{\delta F = 0 \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Gl.
des Variationsproblems

• Bsp:

1. Geodäten = Kurven mit kürzestem Abstand zwischen 2 Pkten

a) Ebene:

- Minimiere _z pot. Energie:

$$U = g \int_1^2 dm z(x)$$

mit $dm = \rho ds \stackrel{(13.15)}{=} \rho dx \sqrt{1+(z')^2}$

$$\rightarrow U = g \rho \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{z(x) \sqrt{1+(z')^2}}_u dx$$

$$\delta U = 0 \xrightarrow{(13.14)} \frac{d}{dx} \frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\text{o.B.} \rightarrow z z'' - (z')^2 = 1$$

[Hinweis: $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$
 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$]

$$\rightarrow \boxed{z(x) = a \cosh \frac{x-x_0}{a}} \quad (13.6)$$

... Kettenlinie

$a?$

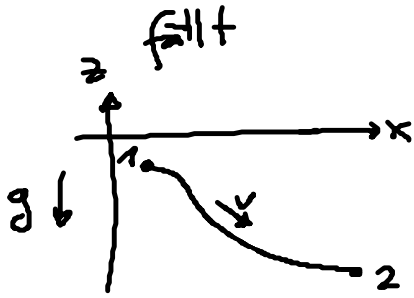
- Nebenbedingung:

$$L = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} ds \quad \text{mit } ds \stackrel{(13.6)}{=} \dots$$
$$= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} d(x-x_0) \cosh \frac{x-x_0}{a}$$
$$= a \sinh \frac{x-x_0}{a} \Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{L}{2a} = \sinh \frac{d}{2a}} \quad (13.17)$$

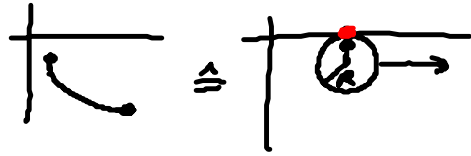
Geg: $L, d \rightarrow a!$

3. Brachistochronen-Problem. Kurve, auf der ein Teilchen in kürzester Zeit im homog. Grav.feld zwischen 2 Pkten.



Minimiere: $T = \int_1^2 \frac{ds}{v}$ (13.18)

→ Teil einer Zykloide



$$\begin{aligned} x &= R(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= R(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

13.3 Euler-Lagrange-Gln. 2 Art

• Herleitung aus Hamiltonschem Prinzip

a) kons. Kräfte / generalisiertes Potential:

• Lagrange-Fkt. $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$

• Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots) dt$

• Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt = 0$

wie in Kap. 12.2 für jedes $y(x) \rightarrow q_j(t)$
 $y'(x) \rightarrow \dot{q}_j(t)$
 $x \rightarrow t$

(13.12) $\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t) dt = 0$

$\delta q_j \dots$ unabh. voneinander
 variierbar

$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (13.3)
 ged.