

13.3 Euler-Lagrange-Gln. 2. Art

• Herleitung aus Hamilton'schen Prinzip

a) konv. Kräfte / generalisiertes Potential:

• Lagrange'sche Fkt.: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$

• Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots) dt$

• Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\dots) dt = 0$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t) dt = 0$$

δq_j unabh.
voneinander

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.3)$$

qed

b) nicht-konservative Kräfte.

• Existiert nicht, stattdessen: (Sommerfeld!)

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0 \quad (13.19)$$

mit $\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i^{(ct)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_j Q_j \delta q_j$ [vgl. (12.24)]

... virtuelle Arbeit

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^{(ct)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

• Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right] \delta q_j \right] dt \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1 \dots f} \quad (12.26)!$$

• Vorsicht: Goldstein / Nolting

$$L = T - W \quad \text{mit} \quad \cancel{W = \sum_i F_i \cdot r_i}$$

• Arbeit ist keine Zustandsgröße, hängt vom Weg ab“
(s. Sommerfeld)

c) Potentialkräfte mit anholonome Zwangsbed.

• also: $L = T - U$
mit $\sum_{j=1}^f \phi_j^{(v)} \delta q_j = 0, \quad v=1, \dots, z \quad (13.20)$

• Variation:

$$\delta S = \int \sum_j \underbrace{\frac{\delta S}{\delta q_j}}_{\substack{\text{wie in} \\ a)}} \delta q_j + \sum_{v=1}^z \lambda_v \sum_{j=1}^f \phi_j^{(v)} \delta q_j \quad dt = 0$$

$$= \int \sum_j \left(\frac{\delta S}{\delta q_j} + \sum_{v=1}^z \lambda_v \phi_j^{(v)} \right) \delta q_j dt = 0$$

Argumentation wie in Kap. 12.4

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{v=1}^z \lambda_v \phi_j^{(v)}, \quad j=1, 2, \dots, f} \quad (13.21)$$

Zwangskräfte [vgl. (12.21)]

... Lagrange-Gln. gemischter Art

$$\boxed{\sum_{j=1}^f \phi_j^{(v)} q_j = 0, \quad v=1, \dots, z} \quad (13.22)$$

also: $f + z$ DGLn. für $f + z$ Variable q_j, \dot{q}_j

13.4. generalisierte Impulse

• Def:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (13.23)$$

... generalisierter
kanonischer
zu q_j konjugierter } Impuls

• Bsp:

(i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j, j = 1, 2, 3 \dots$ kartes. Koord.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} L = T - U \rightarrow p_j = m \dot{x}_j \quad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em-Feld:

$$L = T - W = T - q \varphi + q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (13.26)$$

\nearrow Ladung \nearrow skalar. Potential \nearrow Vektorpotential

$\xrightarrow{(13.23)}$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i \quad (13.25)$$

mechan. Impuls des
Impuls mitgeführtes em. Feldes

NB: viele Teilchen mit holonomer Zwangsbed.

$$\text{mit } \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_s, t)$$

1...3N, $x_1, x_2, x_3 \dots$ 1. Teilchen
 x_4, \dots ... 2. Teilchen
 \vdots

in (13.26)

$$W = q\dot{\varphi} - q \sum_j a_j \dot{q}_j + q \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\text{mit } a_j(\{q_i\}, t) = \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

(13.26)

... general.
 Vektorpotential

= 0 für
 skalarwertige
 Zwangsbed.

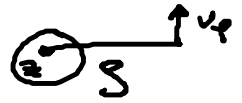
(iii) ebene Bewegung: $x, y \rightarrow \rho, \varphi$
 (im Potential)

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \stackrel{\substack{x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi}}{=} \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

radialer Impuls: $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho}$

Drehimpuls: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} = m \rho v_\varphi$

(13.27)



azimutale Geschw.

13.5 Symmetrien & Erhaltungssätzen

• Lagrange-Gln: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $j = 1, \dots, f$

mit $L = T - U$.. kons. Systeme

$\hat{=}$ f. DGL. 2. Ord. in t
 \rightarrow Lsg. mit 2f Integ. konst.
nicht immer explizit angebar!
 (" " integrierbar)

• trotzdem: hilfreiche Aussagen über System möglich

\rightarrow **Noether Theorem:**
 Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt

kont. Symmetrie = konti. Transformation, die Verhalten des physikalischen Systems nicht verändert

Erhaltungsgröße = 1. Integrale der Bewegung

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst.} \quad \forall t$$

• Untersuchung anhand von $L = T - U$

a) Impulserhaltung

• Def: zyklische Koord.:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (13.28)$$

... Symmetrie von L bzgl. Verschiebung q_j

• (13.28) in (13.3) $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0!$

$$p_j = \text{konst}$$

... Impulserhaltung $\hat{=}$ Konstanz der Bewegung

• Bsp: (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{konst.}!$

Impulserhaltung \leftrightarrow „Translationsinvarianz des Raumes“
 Homogenität

(ii) Teilchen im Zentralpotential: $U = U(r)$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$$

Drehimpulserhaltung \leftrightarrow Drehinvarianz des Raumes
Isotropie

(iii) Vielteilchensysteme:

- Schwerpunkt's. Koord. $R_j = q_j$ Δ Verschiebung des ges. Systems

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_j} = \text{konst.}$$

... Erhaltung des Gesamtimpulses

[Bew.: Goldstein / Nolting]

- Drehung des Gesamtsystems um $\varphi = q_j$ um Achse \hat{z}

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

[Bew.: Goldstein]

b) Energieerhaltung: \leftrightarrow „Invarianz unter Zeittranslation“

also $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\xrightarrow{\text{(13.29)}}$ $\frac{d}{dt} L = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$
Invarianz \swarrow \searrow

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left[L - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \dot{q}_j \right]$$

$$\rightarrow \boxed{H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \text{konst.}} \quad (13.30)$$

... Hamilton fkt!

• Bedeutung von H?