14.2. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

· Legendre-Trafo:

$$L \longrightarrow \boxed{H(\{q_j\},\{p_j\},t) = \sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j - L(\{q_j\},\{\dot{q}_j\},t)} \quad (13.30)$$

... Hamilton-fkt.

$dH = \dots\dots$

Vgl. Vorfaktoren von dq_j, dp_j, dt

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}} \quad (14.4)$$

... Hamiltonsche (kanonische) Gln.
2f Dgln. 1. Ord. für q_j und p_j

$$\& \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}} \quad (14.5)$$

a) Erhaltungssätze & physikal. Bedeutung von H

(i) Energieerhaltung

· totale Zeitableitung:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{-\dot{p}_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j} \dot{p}_j \Big) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad \overset{(14.4)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \overset{(14.5)}{=} -\frac{\partial L}{\partial t}} \quad (14.6)$$

(1) H ... Konstante der Bewegung für $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

(2) $H = T + U$ (13.35)

... Gesamtenergie für $\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0$ [vgl. Kap. 13.5b]

(ii) <u>zyklische Koordinaten</u>: $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\,!$ (13.28)

Legendre Trafo

wegen $\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ & $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\left[= \frac{\partial L}{\partial q_j}\right]$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow p_j = \alpha = \text{konst.}} \quad (14.7)$$

<u>NB.</u> $H = H(q_1 \cdots q_{j-1}, q_{j+1} \cdots p_1, \cdots p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots t)$

mit $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$

H mit nur $2f-2$ Variablen

L mit $2f-1$ Variable (kann $\dot{q}_j$ noch enthalten)

b) <u>Beispiele</u>

(i) <u>Teilchen in 3D</u>: $q_i = x_i$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \\ &\longrightarrow \boxed{H = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, x_2, x_3)} \end{aligned} \quad (14.8)$$

(ii) <u>Bewegung im Zentralfeld</u>: ebene Bewegung ϱ, φ

· $H = T + U(\varrho)$ mit $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2)$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} p_\varrho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = m\dot{\varrho} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} \dot{\varrho} &= \frac{p_\varrho}{m} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{m\varrho^2} \end{aligned}\right.$$

$$\longrightarrow \boxed{H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2}}_{\text{Zentrifugal-potential}} + U(\rho)} \quad (14.9)$$

für $p_\varphi =$ konst. $\longrightarrow$ Keplerproblem

• Beweglgn.:

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \overset{\text{zyklisch}}{=} 0 \longrightarrow p_\varphi = \text{konst.} \ \dots \ \text{Drehimpuls}$$

= Konstante der Bewegung!

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow H = E \ \dots \ \text{Energie} = \text{Konstante der Bewegung}$$

Lösung: s. Kap. 6.3

(iii) <u>Teilchen im em. Feld</u>: $q_i = x_i$ ... kartesische Koord.

• $L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.36)$

• generalisierter Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \quad (13.25)$

• Hamiltonfkt.:

$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \sum_i m\dot{x}_i^2 + q\sum_i A_i \dot{x}_i - L$$

$$\overset{(12.36)}{=} \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2\right) + q\varphi$$

$$\longrightarrow \boxed{H \underset{(13.25)}{=} \sum_i \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\varphi} \quad (14.10)$$

NB: (14.10) aus (14.8) durch <u>Minimalsubstitution</u>: $\boxed{p_i \longrightarrow p_i - qA_i}$ (14.11)

14.3 <u>Methode der Poisson-Klammer</u>

• Observable / Meßgröße:

$$\boxed{A = A(\underbrace{\{q_j\}, \{p_j\}}_{}, t)} \quad (14.12)$$

bestimmen Zustand des Systems eindeutig!

(i) Observable = „QM-Slang"

(ii) Bsp: H, q_j, p_j, Schwerpkt. Koord/-impuls

a) <u>Zeitentwicklung von A</u>: klar, wenn $\frac{dA}{dt}$ bekannt!

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \underbrace{\dot q_j}_{=\frac{\partial H}{\partial p_j}} + \frac{\partial A}{\partial p_j} \underbrace{\dot p_j}_{=-\frac{\partial H}{\partial q_j}} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}} \quad (14.13)$$

mit $\boxed{\{A, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)} \quad (14.14)$

... Poisson klammer von A mit H

<u>Spezialfall</u>:

$$A = q_k \xrightarrow[\frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj},\ \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0]{(14.13/14)} \dot q_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$A = p_k \xrightarrow[\frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj},\ \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0]{(14.13/14)} \dot p_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(14.4) Hamiltonsche Bew. gl.

b) <u>formale Eigenschaften</u>: Rechnen!

$$\boxed{\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right)} \quad (14.15)$$

... Poisson-Klammer

(i) Antisymmetrie:

$$\boxed{\{A,B\} = -\{B,A\}} \qquad (14.16)$$

... <u>nicht kommutativ</u>

$$\longrightarrow \boxed{\{A,A\}=0} \qquad (14.17)$$

(ii) Linearität:

$$\boxed{\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}} \qquad (14.18)$$

(iii) „Nullelement“:

$$\boxed{\{c, A\} = 0} \qquad (14.19)$$

Konstante

(iv) Produktregel:

$$\boxed{\{A, BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}}$$

NB: QM! Beachte Stellung von C und B!

(v) Jacobi-Identität:

$$\boxed{\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0} \qquad (14.21)$$

zyklisch durchtauschen

Beweise: (i) – (iv) durch Einsehen

(v) <u>nicht</u> einfach

c) Beispiele/Rechnen!:

(i) $$\{q_k, p_\ell\} = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_\ell}{\partial p_j}}_{\delta_{\ell j}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_\ell}{\partial q_j}}_{=0} \Big)$$

$$\longrightarrow \boxed{\{q_k, p_\ell\} = \delta_{k\ell}} \qquad (14.22)$$

(ii) $$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}} \qquad (14.23)$$