

14.2. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Legendre-Transf.:

$$L \longrightarrow H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \quad (13.30)$$

... Hamilton.fkt.

$$dH = \dots$$

Vgl. Oorfaktoren von dq_j , dp_j , dt

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad (14.4)$$

... Hamiltonsche (kanonische) Gln.
2 f Ogln. 1. Ord. für q_j und p_j

$$\& \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad (14.5)$$

a) Erhaltungssätze & physikal. Bedeutung von H

(i) Energieerhaltung

• totale Zeitableitung:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_j}}_{\substack{(14.4) \\ -\dot{p}_j}} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \stackrel{(14.5)}{=} -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (14.6)$$

(1) H... Konstante der Bewegung $\Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$(2) H = T + U \quad (13.25)$$

... Gesamtenergie für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ [vgl. Kap. 13.5b]

(ii) zyklische Koordinaten: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0!$ (13.28) Legendre Trafo

wegen $\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ & $p_j = - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} \left[= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right]$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \rightarrow p_j = \alpha = \text{konst.}} \quad (14.7)$$

NB. $H = H(q_1 \dots q_{j-1}, q_{j+1} \dots p_1, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, t)$

mit $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$

H mit nur $2f-2$ Variablen

L mit $2f-1$ Variable (dann \dot{q}_j nachrechnen)

b) Beispiele

(i) Teilchen in 3D: $q_i = x_i$

$$T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 \quad \left. \vphantom{T} \right\} \rightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i$$

$$U = U(x_1, x_2, x_3) \quad \left. \vphantom{U} \right\} \rightarrow \boxed{H = T + U = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(x_1, x_2, x_3)} \quad (14.8)$$

(ii) Bewegung im Zentralfeld: ebene Bewegung ϱ, φ

$H = T + U(\varrho)$ mit $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2)$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} p_\varrho &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varrho}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varrho}} = m \dot{\varrho} \\ p_\varphi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m \varrho^2 \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \begin{cases} \dot{\varrho} = \frac{p_\varrho}{m} \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m \varrho^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow H = \frac{p_\varphi^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mg^2} + U(\varrho) \quad (14.9)$$

zentrifugal-
potential für $p_\varphi = \text{konst.} \rightarrow$ Keplerproblem

• Bewegung: $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \stackrel{\text{zyklisch}}{=} 0 \rightarrow p_\varphi = \text{konst.} \dots$ Drehimpuls
= Konstante der Bewegung!

$$\dot{p}_\varrho = -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = \frac{p_\varphi^2}{mg^3} - \frac{\partial U}{\partial \varrho}$$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H = E \dots$ Energie = Konstante der Bewegung

Lösung: s. Kap. 6.3

(iii) Teilchen im em. Feld: $q_i = x_i \dots$ kartesische Koord.

$$\bullet L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.36)$$

• generalisierter Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \quad (13.25)$

• Hamiltonfkt: $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \sum_i m\dot{x}_i^2 + q \sum_i A_i \dot{x}_i - L$
 $\stackrel{(12.36)}{=} \sum_i \left(\frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right) + q\varphi$

$$\rightarrow H_{(13.25)} = \sum_i \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\varphi \quad (14.10)$$

NB: (14.10) aus (14.8) durch Minimalsubstitution:

$$p_i \rightarrow p_i - qA_i \quad (14.11)$$

14.3 Methode der Poisson-Klammer

• Observable / Meßgröße:

$$A = A(\{q_j\}, \{p_j\}, t) \quad (14.12)$$

bestimmen Zustand des Systems eindeutig!

(i) Observable = „QM-Slang“

(ii) Bsp: H , q_j , p_j , Schwerpunkt. Koord./-impuls

a) Zeitentwicklung von A: klar, wenn $\frac{dA}{dt}$ bekannt!

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\rightarrow \frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (14.13)$$

$$\text{mit } \{A, H\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \quad (14.14)$$

... Poisson-Klammer von A mit H

Spezialfall:

$$\left. \begin{aligned} A = q_k & \xrightarrow{(14.13/14)} \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \delta_{kj}, \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0 & \dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ A = p_k & \xrightarrow{(14.13/14)} \frac{\partial p_k}{\partial p_j} = \delta_{kj}, \frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0 & \dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (14.4) \\ \text{Hamiltonsche} \\ \text{Bew. gl.} \end{array}$$

b) formale Eigenschaften: Rechnen!

$$\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) \quad (14.15)$$

... Poisson-Klammer

(i) Antisymmetrie:

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (14.16)$$

$$\rightarrow \{A, A\} = 0 \quad (14.17)$$

... nicht kommutativ

(ii) Linearität:

$$\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\} \quad (14.18)$$

(iii) Nullelement:

$$\{c, A\} = 0 \quad (14.19)$$

↑
Konstante

(iv) Produktregel:

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}$$

NB: QM! Beachte Stellung von C und B!

(v) Jacobi-Identität:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad (14.21)$$

↑
zyklisch
durchtauschen

Beweis: (i)-(iv) durch Einsetzen

(v) nicht einfach

c) Beispiele/Rechnung!

$$(i) \{q_k, p_l\} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_{=0} \right)$$

$$\rightarrow \{q_k, p_l\} = \delta_{kl} \quad (14.22)$$

$$(ii) \{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\} \quad (14.23)$$