

15. Hamilton-Jacobische Theorie

• erzeugende Funktion für kanon. Trafo auf

$$Q_k = \beta_k = \text{konst.}$$

$$p_k = \alpha_k = \text{konst.}$$

$$\rightarrow S(\{q_i\}, \{\alpha_i\}, t) \quad (15.3)$$

... Hamilton-Jacobische - Wirkungsfkt.
(Hamiltonsche Prinzipalfkt.)

mit $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ und $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\rightarrow H(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i} \right\}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (15.4)$$

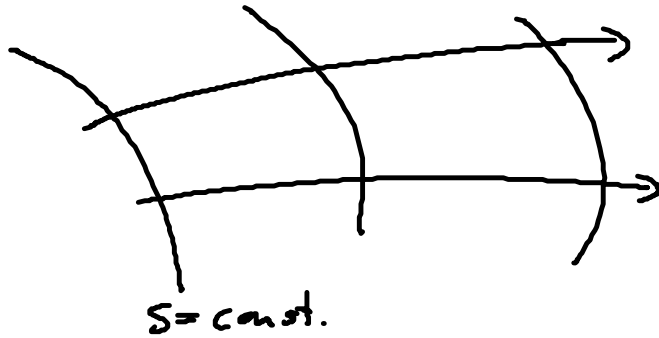
... Hamilton-Jacobische - Dgl. für S!

• Eigenschaft von S:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{(15.2) = -H} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{(15.3) = p_j} \dot{q}_j = -H + \sum_j p_j \dot{q}_j \stackrel{(13.30)}{=} L$$

$$\rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad !!!$$

• Anschluß an die QM. (\rightarrow Goldstein)



$S = \text{const.}$
 = Wellenfronte im Ortsraum $\{q_i\}$
 Geschw. $c = \frac{E}{\sqrt{2(E-U)}}$

Analogie
 \longleftrightarrow
 zu

Grenzfall der
 geometr. Optik
 für Lichtwellen
 (Eikonalgleichung)

\uparrow
 $\lambda |\nabla n| \ll n$

? \uparrow \downarrow ?

Schrödingersche
 Wellenmechanik

Wellengl. für
 Lichtwellen
 $(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = 0$
 $\phi \dots$ skalares Potential

\longleftrightarrow

IV. Spezielle Relativitätstheorie

• Einstein (1905)

[neben Erklärung photoelektr. Effekt: $E = h\nu$
 und Brownsche Bewegung: Stokes-Einstein-
 Relation]

16. Die Lorentz-Transformation

• Trafo von $IS \rightarrow IS'$

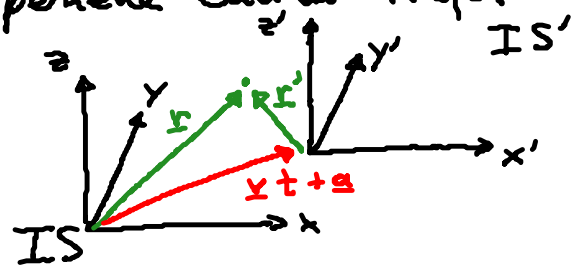
16.1. Situation vor Einstein

a) Galileische Relativitätsprinzip:

- Alle IS (in ihwangelen die Newtonsche Axiome) sind gleichwertig = die Newst. Axiome sind „forminvariant“ (16.1) (= kovariant) unter Galilei transf.

↑ Trafo von IS → IS'

• spezielle Galilei-Trafo:



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{a} \quad (16.2) \quad \xrightarrow{\text{d. B. d. A.}} \begin{matrix} \underline{v} = v \underline{e}_x \\ \underline{a} = 0 \end{matrix}$$

„boost“ in x-Richtung

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (16.3)$$

↑ Zeit läuft absolut

• Addition von Geschw.

$$\underline{v}_0 \text{ in IS} \xrightarrow{\frac{d}{dt} (16.2)} \underline{v}' = \underline{v}_0 - \underline{v}$$

$$\underline{v}_0 = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

b) Licht = em. Welle : von Einstein: „verwirrende Tatsache“

• Maxwell-Glm: → Wellengl. für Lichtwellen

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \underline{E} = 0 \quad \left[\text{vgl. (11.24) für Seite} \right]$$

↑ elektr. Feld

↑ Lichtgeschw. unabhängig von IS !

also: Kugelwelle IS → Kugelwelle in IS'

• Maxwell-Gln. nicht invariant unter Galilei-Transform!

• Ätherhypothese:

Licht bewegt sich mit c in einem "elastischen Medium", darf keine "Schallwellen" = Longitudinalwellen erlauben!

Äther = IS: c , Kugelwelle

IS': $c - v$! \swarrow zur Maxwell-Gln.

↑
keine Kugelwelle

• Michelson-Morley-Exp.:

gleiches c auf Erde & im Weltraum

→ Erklärungsversuche von Lorentz & Fitzgerald: "Lorentzkontraktion"

16.2. Einstein'sches Relativitätsprinzip

Alle IS sind gleichwertig

= alle physikal. Gesetze sind kovariant unter Lorentztransf. (16.6)

→ Die Lichtgeschw. c ist unabh. von IS (16.7)

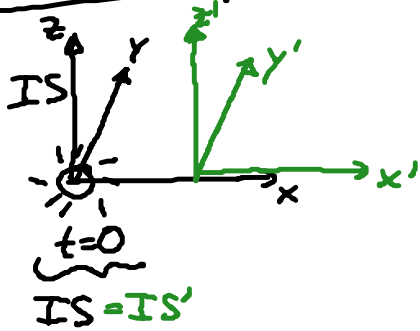
→ neue Struktur Raumzeit!

bisher: Euklid. Raum & absolute Zeit

jetzt:

16.3 Der Minkowski-Raum

Gedanken Exp.



Ausbreitung eines Lichtpulses bei t=0:

$$\left. \begin{aligned} \text{in IS: } -c^2 t^2 + \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2} &= 0 \\ \text{in IS': } -c^2 t'^2 + \underbrace{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}_{r'^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (16.8)$$

↑
Zeit in IS' !!

Lineare Trafo: $\{r, t\} \rightarrow \{r', t'\}$

Grund: $\ddot{r} = 0 \rightarrow \ddot{r}' = 0$

also: (16.8) f. allg. Ereignis:

$$-c^2 t^2 + r^2 = \lambda(v) [-c^2 t'^2 + r'^2]$$

(i) $\lambda(v) = \lambda(-v) \dots$ Isotropie des Raumes

(ii) IS \rightarrow IS' \rightarrow IS: $\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$

keine Stetigkeit
für $v \rightarrow 0$
(16.9)

\rightarrow $-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$

\dots Norm im Minkowski-Raum
ist Lorentz-Skalar

Minkowski-Raum : = 4D Raumzeit

(Kontavariant)

Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} ct \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

(16.10)

Komp: x^α
 $\alpha = 0, 1, 2, 3$

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = - (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (16.11)$$

mit $g_{\alpha\beta}$ Elemente von $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \dots$ metrischer Tensor (16.12)

- kovarianter Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Komp.: $x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta$ (16.13)

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha$$
 (16.14)