

## 16.3 Minkowski-Raum = 4D-Raumzeit

Lichtausbreitung  $\rightarrow$

$$-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum  
= Lorentz-Skalar

• Vierervektor:  
(kovariant)  $\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , Komp.  $x^\alpha$

kovariat:  $\begin{pmatrix} -ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta$   
 $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$  ... metrischer Tensor

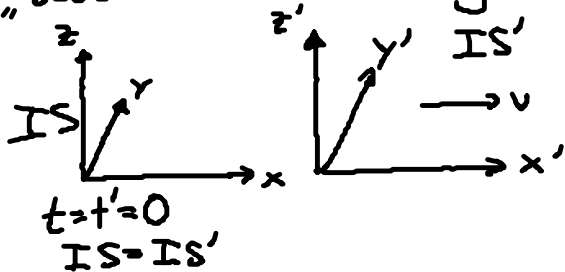
• Minkowski-Norm:  $\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha$

## 16.4. Die Lorentztrafo

• Trafo von IS  $\rightarrow$  IS'

• Def: Die Minkowski-Norm (16.9) ist invariant unter Lorentztrafos.

• „boost“ in x-Richtung: also  $y=y'$ ,  $z=z'$



allg. lineare Trafo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

∴ [s. Kopie]

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma (x - \beta ct) \\
 ct' &= \gamma (ct - \beta x) \\
 \beta &= \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
 \end{aligned}$$

(16.16)

Lorentz-Transform für  
Geschw. „boost“ in x-Richtung

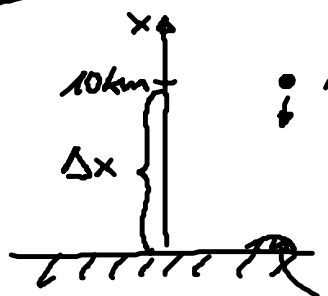
NB: (1)  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow \beta = 0, \gamma \approx 1$

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow[\beta c = v]{(16.16)} \quad & \left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \text{Galilei-Transform}
 \end{aligned}$$

(2) synchronisierte Uhren in IS:  $\textcircled{L} \textcircled{L} \textcircled{L} \textcircled{L} \textcircled{L} \xrightarrow{x}$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow ct' &= -\gamma \beta x \\
 \uparrow \\
 ct &= 0 \quad \dots \text{ nicht synchronisiert in IS'!} \\
 & \text{Gleichzeitigkeit ist relativ!}
 \end{aligned}$$

• illustratives Bsp:



• Myon mit Lebensdauer  $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

Messung der Myonen

(1) ohne SRT:  $v_\mu \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\rightarrow s = v_\mu \tau = 600 \text{ m} \ll 10 \text{ km} \frac{1}{2}$$

(2) mit SRT: IS = Erde

IS' = Myon bei  $x' = 0$ , „innere Uhr“:  $\tau = \Delta t'$

a) in IS: Flugzeit  $\Delta t$ ?

$$(16.16) \rightarrow c \Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (1)$$

$$\Delta x' = 0 = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \Delta x = \beta c \Delta t$$

$$\text{in (1)} \rightarrow c \Delta t' = \gamma c \Delta t \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t < \Delta t$$

... Zeitdilatation = bewegte Uhren gehen langsamer

$$\text{Bsp: } v = \frac{999}{1000} c \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{5}{100} \rightarrow \Delta t = \frac{100}{5} \tau = 4 \cdot 10^5 \tau$$

$$\rightarrow \Delta x \approx c \Delta t = 12 \text{ km} \checkmark$$

b) IS': Flugweg  $\Delta x'$ ? „Messe  $\Delta x$ “ in IS' für  $\Delta t' = 0$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c \Delta t) \quad (3)$$

$$0 = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) \quad (4)$$

$$(4) \rightarrow c \Delta t = \beta \Delta x \text{ in (3)}$$

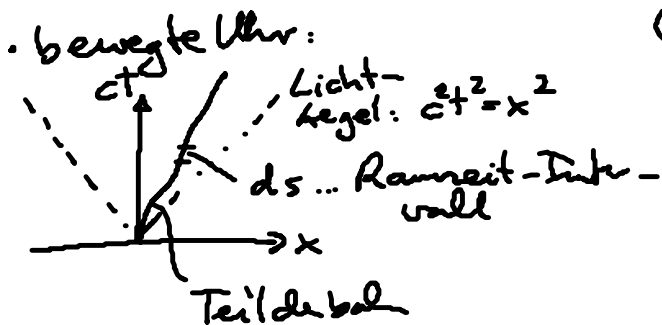
$$\Delta x' = \gamma \Delta x \underbrace{(1 - \beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\rightarrow \Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta x < \Delta x \quad (16.18)$$

... Lorentz Kontraktion = bewegte Maßstäbe sind kürzer ☹

## 17. Relativistische Mechanik

### 17.1. Eigenzeit



$$(16.17) \quad cd\tau = cdt'$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} cdt$$

$$= [c^2 dt^2 - v^2 dt^2]^{1/2}$$

$$= [c^2 dt^2 - dx^2]^{1/2}$$

$ds^2$  ... Lorentz skalar

$$\rightarrow \tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int \gamma^{-1} dt \quad (16.19)$$

... Eigenzeit = Lorentzskalar

## 17.2 Impulssatz

- Regeln: (i) verknüpfte Vierervektoren  
(ii)  $\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow$  Newtonsche Mechanik

• Differenzvektor:  $dx^\alpha, \begin{pmatrix} cd t \\ d\vec{r} \end{pmatrix} \quad (16.20)$

• Vierer-Geschw.:  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \stackrel{16.19}{=} \gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \quad (16.21)$   
 Skalar

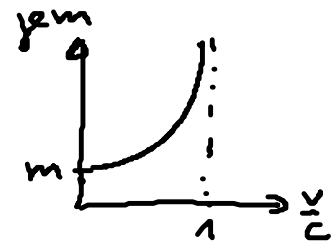
• Vierer-Impuls:

$$p^\alpha = m u^\alpha, \quad \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (16.22)$$

Masse = Skalar

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \quad (16.23)$$

geschw. abhängige Impuls-masse!



• Impulssatz:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = K^\alpha \quad (16.24)$$

Viererkraft!?

(i) räumliche Komponenten:  $(\alpha = 1, 2, 3)$

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \underbrace{\gamma \underline{F}}_{\text{"Newton"}} = \underline{K} \quad (16.25)$$

macht Sinn:  $\frac{v}{c} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \gamma \approx 1: \frac{d\underline{mv}}{dt} = \underline{F}!$

(ii) zeitliche Komponente: ( $\alpha=0$ )

- Geschwindigkeitsquadrat:

$$u^\alpha u_\alpha = \underbrace{\gamma^2(-c^2 + v^2)}_{-c^2(1-\frac{v^2}{c^2})} = -c^2 \quad (16.26)$$

- Betrachte:  $\frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} u^\alpha u_\alpha = 0 = m u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} = u_\alpha \frac{dp^\alpha}{d\tau}$

$$\rightarrow 0 = u_\alpha K^\alpha = \underbrace{-u^0}_{u^0 = -\gamma c} K^0 + \gamma \underline{v} \cdot \underbrace{\underline{K}}_{\gamma \underline{F}}$$

also: 
$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$= \frac{\gamma}{c} W$$

↑ pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit!

- Energiesatz! aus 0.ter Komp. von Impulssatz

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$\frac{dE}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{F} \quad (16.27)$$

mit  $E = c p^0 = \underbrace{m \gamma c^2}_{(16.22)} \dots$  Energie eines Teilchens

Grenzfall:  $\frac{v}{c} \ll 1$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2} \quad (16.28)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   
Ruhe-  
energie

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   
kinet.  
Energie