

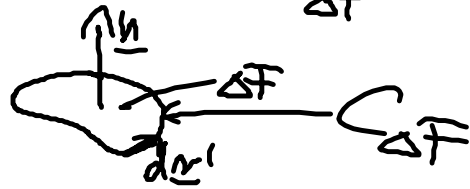
Wdh: Ableitungen von Vektorfeldern $\underline{A}(\underline{r}, t)$

- Divergenz \rightarrow Quelldichte

- Rotation \rightarrow Wirbelstärke von $\underline{A}(\underline{r})$

Integraldefinition:

$$\text{rot } \underline{A}(\underline{r}) \cdot \underline{n} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_{\Delta F}} d\underline{r}' \cdot \underline{A}(\underline{r}')$$



Auswertung für kartesische Koordinaten

$$\text{rot } \underline{A}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

Nabla - Operator

Stokes'scher Integralsatz

$$\oint_C \underline{A}(\underline{r}') \cdot d\underline{r}' = \int d\underline{F} \cdot (\nabla \times \underline{A}(\underline{r}'))$$

Kurvenintegral über
Vektorfeld \underline{A}

Flächenintegral über die
Rotation

II. Elektrostatik

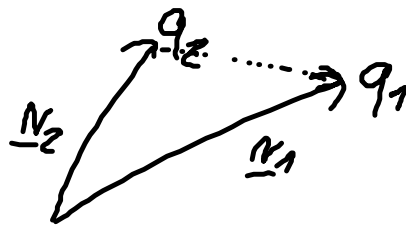
— Phänomene, die zeitlich ^{statisch} konstante Ladungen und statische Felder involvieren

II.1. Grundlagen

II.1.1. Coulomb'sches Gesetz

Ausgangspunkt: Es gibt 2 Sorten von Ladungen, positiv und negativ. Drei Ladungen üben Kräfte aufeinander aus.

Betrachte nun zwei punktförmige ^{ruhende} Ladungen q_1, q_2 an Orten $\underline{r}_1, \underline{r}_2$



$$\underline{F}_{\text{Kraft}} = k q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} \quad \text{Coulombkraft (1785)}$$

Bemerkungen

- k ist eine positive Konstante.
Es gibt dazu zwei Wahlmöglichkeiten

a) $k=1$ "Gauß-System" (CGS)
Centimetre Gram Second

veraltet, aber immer noch in vielen
Lehrbüchern und Publikationen verwendet

b) $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ mit $\epsilon_0 = 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Diese Wahl ~~heißt~~ nennt man "SI"
Système International
d'unités

ϵ_0 : Permittivität des Vakuums
(oder auch 'elekttr. Feld-
konstante')

Wir werden hier (meist) SI benutzen!

• Coulombkraft ist offensichtlich Zentralkraft!
(da nur abhängig von Verbindungsstelle $r_1 - r_2$)

Sie ist attraktiv bzw. repulsiv falls

$q_1 q_2 < 0$ bzw. $q_1 q_2 > 0$
"ungleichnamig" "gleichnamig"

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

- Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^2}$

← wie Gravitationskraft!

aber die Coulombkraft ist viel stärker!

Betrachte 2 Elementarladungen im Abstand eines Bohr-Radius ($a_B = 0.53 \text{ \AA}$ $\sim 10^{-10} \text{ m}$)

$$F_{\text{Coulomb}} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_{\text{Gravitation}} \sim 10^{-47} \text{ N}$$

Unterschied von 39 Größenordnungen!

typische atomare
Längenskala

- Gültigkeit: bis hinein in den atomaren Bereich

$$r \gtrsim 10^{-13} \text{ m}$$

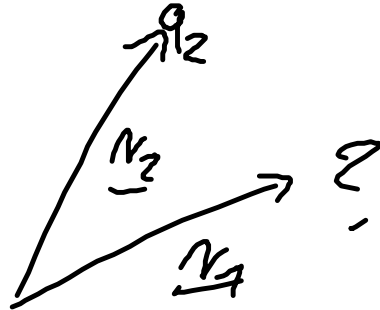
Für kleinere Abstände gibt es quantenelektrodynamische Korrekturen infolge von Wechselwirkungen zwischen den geladenen Elementarteilchen und den "Austauschteilchen" der elektromagnet. WW, den Photonen

II. 1.2. Elektrisches Feld

Wir definieren nun über die Coulombkraft das Feld \underline{E} , das durch eine Ladung q_2 bei \underline{r}_2 an einem Ort \underline{r}_1 erzeugt wird

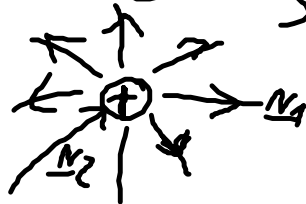
$$\underline{F}(\underline{r}_1) \stackrel{!}{=} q_1 \underline{E}(\underline{r}_1)$$

$\underline{F}^{\text{Coulomb}}$



$$\underline{E}(\underline{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

\Rightarrow Feldlinien einer Punktladung verlaufen radial und sind für $q_2 > 0$ ($q_2 < 0$) weg von der Ladung (hin zur Ladung) gerichtet



Einheit des Feldes

$$\text{el. Feld} \stackrel{!}{=} \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

Einheit $1 \frac{N}{C}$ (Newton)
 C (Coulomb)

$$1C = 1As$$

benutze $1V = \frac{Nm}{As}$

Einheit für das Feld: $1 \frac{V}{m}$

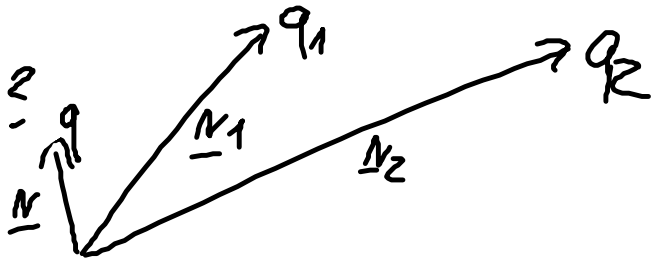
Verallgemeinerung des bisherigen
Ausdrucks für das elektr. Feld

- Statt einer Punktladung seien N Punktladungen q_i mit $i = 1, \dots, N$ anwesend, die an den Orten \underline{r}_i ruhen

→ Kräfte auf eine Ladung q bei \underline{r}
addieren sich auf

⇔ Coulombkraft ist additiv!

Superpositionsprinzip



$$\underline{E}(\underline{r}) = q \underline{E}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$$

„diskrete Punktladungen“

- Betrachte statt des Satzes diskrete Punktladungen eine kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N q_i \longrightarrow \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}')$$

„Ladungsdichte“

$$\underbrace{d\underline{r}' \rho(\underline{r}')}_{\text{Volumen-}} = \underbrace{dq}_{\text{Ladung im Volumen-}} \\ \text{element} \quad \text{element } d\underline{r}'$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{gesamter Raum}} d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Spezialfall:

Die Ladungsdichte ist wieder aus Punktladungen aufgebaut

$$\rho(\underline{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)$$

↳ Deltafunktionen

Einsetzen

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \int d\underline{r}' \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i) \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Benutze Eigenschaft der Deltafunktion: $\int dx f(x) \delta(x-a) = f(a)$
 $\int d\underline{r} f(\underline{r}) \delta(\underline{r}-\underline{a}) = f(\underline{a})$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3}$$

alte Formel!

II, 1.3. Elektrostatik, Potential

Ausgangspunkt:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underbrace{\frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}}_{=: \underline{f}(\underline{r}, \underline{r}')}$$

Die Funktion $f(\underline{r}, \underline{r}')$ kann ausgedrückt werden als

$$\underline{f}(\underline{r}, \underline{r}') = -\nabla_{\underline{r}} \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)$$

dem:

$$\nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \stackrel{\text{Kettenregel } R=|\underline{r} - \underline{r}'|}{=} \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \right) \nabla_{\underline{r}} R$$

$$= -\frac{1}{R^2} \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = -\frac{(\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

Einsetzen in Ausdruck für $\underline{E}(\underline{r})$

$$\rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= -\nabla_{\underline{r}} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right)$$

Kann aus Integral gezogen werden, da Ableitung nach \underline{r} !

Definiert:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

elektrostatische Potential

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$$

Interpretation: Für ein gegebenes elektrostatisches Feld
kann man ein skalares elektrostatisches
Potential angeben

Beachte dabei: $\Phi(\underline{r})$ ist nur bis auf eine konstante additive

Spezialfall Punktladung:

$$\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}' - \underline{r}_1) q_1$$

einsetzen in die Definition

$$\Rightarrow \Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|}$$

Punkt, an dem
man "schaut"

Punkt, an dem
die Ladung
kollektiert ist

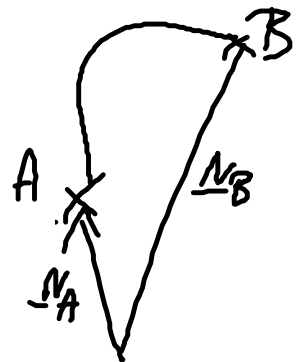
Wichtig: Abstandsabhängigkeit $\frac{1}{r}$

Bezug zwischen elektrost. Potential
und Energie

Betrachte Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

Frage: Welche Arbeit muß man aufwenden,
um q vom Ort \underline{r}_A zum Ort \underline{r}_B
zu bringen?

$$\text{Arbeit } W = - \int_A^B d\underline{r} \cdot \underline{F}(\underline{r}) = -q \int_A^B d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r})$$



allgemeiner Ausdruck für Arbeit, bekannt
aus Mechanik

benutze jetzt $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$

$$W = -q \int_A^B d\underline{r} \cdot (-\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r}))$$

$$= q(\Phi(\underline{r}_B) - \Phi(\underline{r}_A))$$

Arbeit $\hat{=}$ Differenz potentieller Energien

(Interpretation wie in der klas. Mechanik!)

$\Rightarrow q\Phi(\underline{r})$ ist die potentielle Energie einer Ladung im Feld $\underline{E}(\underline{r})$!

Man sieht außerdem:

Die Arbeit W ist offensichtlich unabhängig vom Weg von A nach B ; es kommt nur auf die Differenz der potentiellen Energien an!

$$\oint \underline{E}(\underline{r}') \cdot d\underline{r}' = 0$$

geschlossenes
Kurvenintegral

Vektoranalysis:
rot grad $\Phi(\underline{r}) = 0$

Folgerung:

$$\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \times \nabla_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) \\ = 0$$

Elektrostatische Felder sind also
wirbelfrei!

Bemerkung:

• Dies ist anders in der Elektrodynamik:

Durch zeitliche Änderung eines Magnetfeldes
kann man elektrische Felder mit Wirbeln erzeugen

$$(\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{r}, t) \neq 0)$$

• In der Elektrostatik ist jedoch die Gleichung
 $\operatorname{rot} \underline{E}(\underline{r}) = 0$ eine Grundgleichung!