

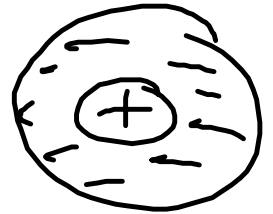
typische
Materialbeziehung:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \underline{\epsilon_0 \chi_e E}(\underline{r}, t)$$

- zeitliche "instantan"
- räumlich homogen
- skalar

Ziel: einfaches mikroskop Modell für $\chi_e = \epsilon - 1$
statisch!

- betrachte nur 1 Atom
- im Atom kann (muss) ein Dipolmoment induziert werden!



Wir hatten:

$$\underline{Kern} : m_K \ddot{\underline{r}}_K = \underline{F}_K + Q_K \underline{E}^{ext}$$

$Q_K = Ze > 0$
↑ Kernladung

Kraft durch die Elektroten

N_e : Schwermetall
der Elektroden

$$F_U = Q_U E_e(r_U) \\ = - \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (r_U - r_e)$$

Idee:
hohler
geladene
Kugel!

Elektronen:

$$Z m_e \ddot{r}_e = \overline{F}_e + Q_e E^{\text{ext}} \\ \text{mit } \overline{F}_e = -\overline{F}_U$$

Führt ein: $\underline{r} = \underline{r}_U - \underline{r}_e$

$$\underline{r} \neq 0 \Leftrightarrow \text{ Ladungsverschiebung}$$

und nehme an, dass $m_U \gg Z m_e$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} = - \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{Z m_e} \underline{r} + \frac{Z e}{Z m_e} E^{\text{ext}}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} E^{\text{ext}}$$

BWGL eines harmonischen
Oszillators!

Stationärer Zustand: $\underline{\dot{r}} = \underline{\ddot{r}} = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{ext}}$$

$$\underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{ext}} \quad (*)$$

Zugehöriges (induziertes) Dipolmoment.

definiere: $\underline{p} = Ze \underline{r}$

(Dimensionen: Ladung \times Ort (!))

o.k.!

hier:

$$\underline{p} = \int d\underline{r} \rho(\underline{r}) \underline{r}$$

hier: $\rho(\underline{r}) = \text{const. in der Kugel}$

Kombiniere mit (*)

$$\underline{p} = Ze \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{ext}}$$

$$= \frac{Ze^2}{m_e} \frac{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}{Ze^2 \omega_0^{-1}} \underline{E}^{\text{ext}} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \underline{E}^{\text{ext}}$$

definiere mikroskopische Polarisierbarkeit des Atoms:

$$\underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E}^{\text{ext}}$$

mit

$$\alpha = \frac{ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = \left(\frac{1}{11} \text{Å} \right)^3 = 3 \text{ V}_{\text{Atom}}$$

Veralgemeinerung für viele

(nicht miteinander wechselwirkende)

Atome:

$$\underline{P} = n \underline{p} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{ext}}$$

mikroskop. Polarisation

Teilchendichte

Konsistent mit unserer
früheren Definition:

$$\text{hier: } p_i = p \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\underline{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \underline{p}_i = n \underline{p}$$

↑
Dichte

$$\underline{P} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\underline{s} \underline{P}_{\text{mikro}}(n+s)$$

$$\sum_{i \in \Delta V} p_i d(n+s - n_i)$$

Bis jetzt mikroskop. begründet:

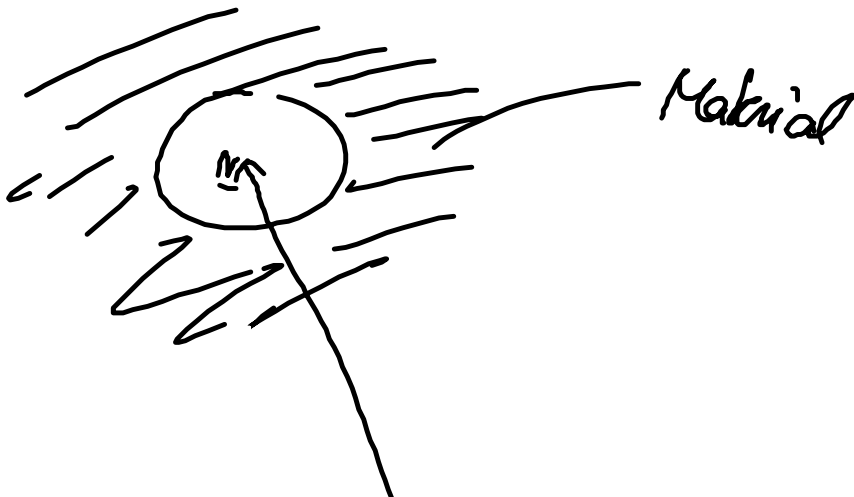
Zusammenhang zwischen \underline{P} und
dem extern kontrollierbaren Feld $\underline{E}^{\text{ext}}$!!
 $\underline{E}^{\text{okal}}$..

Wir wollen aber Zusammenhang zw. \underline{P} und
dem makroskop. Feld \underline{E} im Körper !!
..

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad !!$$

Ansatz (Lorentz)

$$\underline{E}^{\text{okal}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) - \underline{E}^{\text{P}}(\underline{r})$$



Feld?

mit $\underline{E}^{\text{nah}}$: Beitrag der ^(induziert o. permanent) Dipole in einer
kugelförmigen Umgebung von \underline{r}
— hängt ab von der mittl. Konfiguration der Nachbar-moleküle

\underline{E}^{P} : Feld, das aus einer
Kontinuumsapproximation kommt,
in die nur die Polarisation
der ganzen Kugel eingedat!

$\Rightarrow \underline{E}^{\text{nah}} - \underline{E}^{\text{P}}$: Korrektur zum makroskopischen Feld!

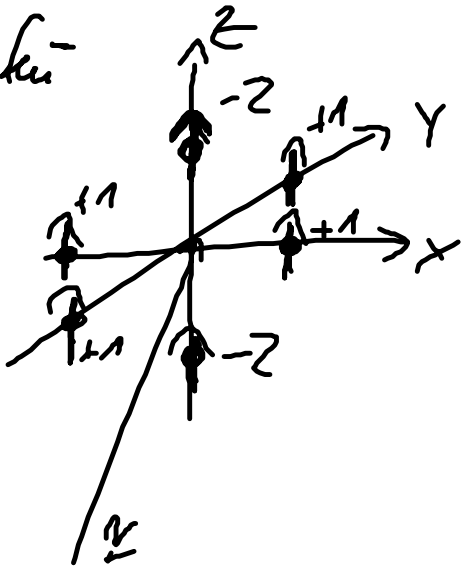
Man findet:

$$\underline{E}^{\text{nah}} \approx 0 \quad !!$$

in vielen Fällen, zumindest für symmetrische
Konfigurationen!

$$\underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) = \sum_{i \text{ innerhalb einer Kugel um } \underline{r}} \left(\frac{3 \rho_i (\underline{r}_i - \underline{r})(\underline{r}_i - \underline{r})}{4 \pi \epsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}|^5} - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{\rho_i}{|\underline{r}_i - \underline{r}|^3} \right)$$

Überegung für
einfach
kubisches
Gitter!



$$E_z(\underline{r}) = 0 \quad !$$

Für \underline{E}^p findet man:

$$\underline{E}^p = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

⇒ Übungsblatt 10

Feld im Inneren
einer ~~polaren~~ homogen
polarisierten Kugel!
(beachte: Das Feld wird gegen die
Polarisation !!)

Einsetzen in den Gauß-Ansatz.

$$\underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \cancel{\underline{E}^{\text{nah}}} - \underline{E}^p$$

$$= \underline{E}(\underline{r}) + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad !!$$

Kombiniere dies mit dem Ansatz

$$\underline{P} = n \alpha \epsilon_0 \underline{E}^{\text{total}} \quad (1)$$

$$\underline{P} = \chi_e \epsilon_0 \underline{E} \quad (2)$$

aus (1) $\underline{P} = \overset{\text{Gesamt}}{\epsilon_0 n \alpha} \left(\underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \right)$

$$\underline{P} \left(1 - \frac{n\alpha}{3} \right) = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P} = \left(\frac{\epsilon_0 n \alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}} \right) \underline{E}$$

$$\stackrel{!}{=} \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \chi_e = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}$$

oder

$$n\alpha = \frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}} = 3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}$$

$\epsilon + 1$

Formeln von Clausius und Lorentz
(1850 bzw. 1879)

VI, 5. Feldverhalten an Grenzflächen

(noch keine Wellen)

Frage:

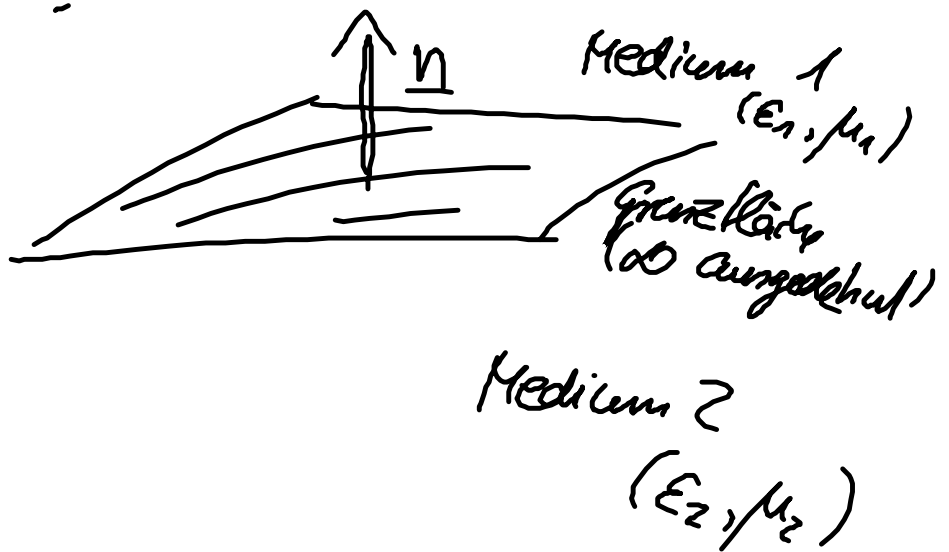
Welche Randbedingungen müssen die elektromagnetischen Felder an Grenzflächen zw. zwei Medien erfüllen?

① $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

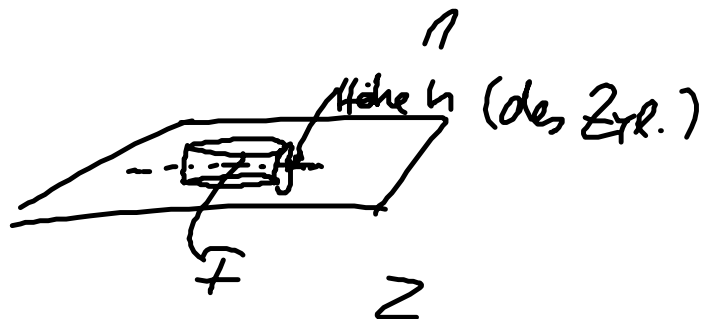
② $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$

③ $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

④ $\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$



Integriere ① und ② über ein kleines Volumen (Zylinder), das die Grenzfläche einschließt!



aus ① =

$$\int_{\text{Zyl.}} dV \nabla \cdot \underline{B} = \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{B}$$

Oberfläche
des Zylinders

Betrachte Grenzfall
 $h \rightarrow 0$ und nehme an,
dass \underline{B} homogen
auf F

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{B} = \int_F d\underline{F} \cdot (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)})$$

Nur Ober- und
Unterfläche tragen bei!

$$= \int_F d\underline{F} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n}$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{nach Maxwell!}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0}$$

\Rightarrow Normalkomponente von \underline{B} verhält sich
 stetig beim Durchgang durch die
 Grenzfläche
 $\underline{B} \cdot \underline{n}$

analog:
 $\int_{\text{Zyl.}} dV \nabla \cdot \underline{D} = \int_{\text{Fl.}} d\underline{F} \cdot \underline{D} \stackrel{\text{Maxwell (2)}}{=} \int dV \rho$

$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{Fl.}} d\underline{F} \cdot \underline{D} = \int_{\text{Fl.}} d\underline{F} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int dV \rho$

Annahme:

Grenzfläche trägt eine (freie)

Rächenladungsdichte σ bei $z=0$

$$g(\underline{r}) = \sigma(x, y) d(z)$$

Grenzfläche ist die
 $x-y$ -Ebene!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{Z_{\text{yl.}}} dV g(\underline{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\sqrt{dF}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz \underbrace{G(x,y)}_{\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz d(z) = 1} dF$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Z_{\text{yl.}}} dV g = \lim_{h \rightarrow 0} \int dF G(x,y)$$

$\bar{\sigma}$ konstant auf F

$$= F \cdot \bar{\sigma}$$

$$\Rightarrow \left(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)} \right) \cdot \underline{n} = \bar{\sigma}$$

Normale Komponente von \underline{D} macht also einen Sprung, falls $\bar{\sigma} \neq 0$

beachte: Auch für $\bar{\sigma} = 0$ kann aber

die Normalkomponente von \underline{E}
umkehrig sein!

$$\begin{aligned}\text{benutze: } \underline{D} &= \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\ &= \epsilon_0 \underline{E} + \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}\end{aligned}$$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad (\text{mit } D_n = \underline{D} \cdot \underline{n})$$

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_n^{(2)}$$

$$\Rightarrow E_n^{(1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_n^{(2)}$$

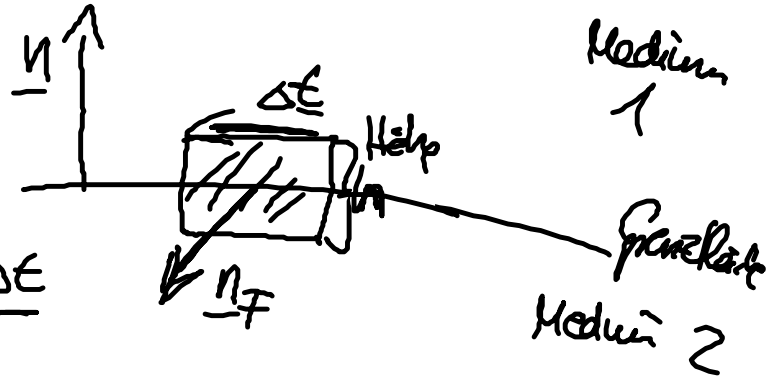
betrachte nun die Potentials-Maxwell-g.

$$\textcircled{3} : \nabla \times \underline{E} = - \dot{\underline{B}}$$

$\textcircled{3}$

$$\int_{\Gamma} d\vec{F} \nabla \times \underline{E} = \int_{C_{\Gamma}} d\vec{r} \cdot \underline{E} \stackrel{!}{=} - \int_{\Gamma} d\vec{F} \cdot \underline{\dot{B}}$$

Stokes



$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C_{\Gamma}} d\vec{r} \cdot \underline{E} = (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta t}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} d\vec{F} \cdot \underline{\dot{B}} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} d\vec{F} \cdot \underline{\dot{B}} \cdot \underline{n}_F = \underline{\dot{B}} \cdot \underline{n}_F \lim_{h \rightarrow 0} \Gamma = 0$$

beachte $\underline{n}_F \perp \underline{n}$!

$$(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

Tangential Komponente von \underline{E} ist
stetig beim Durchgang durch die
Grenzfläche!

Schließglied:

$$\int_{\Gamma} d\vec{F} \nabla \times \underline{H} = \int_{C_{\Gamma}} d\vec{r} \cdot \underline{H} \stackrel{\text{Maxwell}}{=} \int_{\Gamma} d\vec{F} \cdot \underline{j} + \int_{\Gamma} d\vec{F} \cdot \underline{\dot{D}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t}$$

Tangentialkomponenten
von \underline{H}

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int d\underline{r} \cdot \underline{\dot{D}} = \underline{\dot{D}} \cdot \underline{n}_F \lim_{h \rightarrow 0} F = 0$$

Zum Spanintegral:

Nehme an, die Fläche frage eine haire
"Flächendunsterdichte"

$$\dot{J}(\underline{r}) = g(x, y) d(z)$$

Ganzfläche liegt
weder ~~in~~ in der x - y -Ebene
(bei $z=0$)

Fläche, über die integriert wird, liegt in der
 x - z -Ebene.
in y -Richtung

$$\int dF \cdot \underline{j}(\underline{n}, t) = \int dF \quad \underline{j} \cdot \underline{n}_F = \int dx \quad g(x, y) \cdot \underline{n}_F$$

$$\int dx \int dz = g \cdot \underline{n}_F \cdot \Delta x$$

Zusammenfassend:

$$\left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t} = (g \cdot \underline{n}_F) \cdot \underline{\Delta t}$$

Tangentialkomponente von \underline{H} macht einen Sprung, falls Flächensstromdichte vorhanden!