

VI.8. Dielektrische Dispersion

Betrachte Materie mit $\mu \approx 1$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\epsilon}$$

Brechungsindex \leftarrow Dielektrizitätskonstante

Im ~~allgemein~~ den meisten Materialien ist ϵ und damit n eine frequenzabhängige Größe, d.h.

$$\epsilon = \epsilon(\omega)$$

$$n = n(\omega)$$

"Dispersion"

Zugehörige Materialbeziehungen?

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(\underline{r}, t-t') \underline{E}(\underline{r}, t')$$

Polarisation

Suszeptibilität
($\epsilon = 1 + \chi_e$) $\textcircled{*}$

Annahmen:

- homogenes, isotropes Medium

- nur zeitliche Dispersion

— daher in $\textcircled{*}$ nur Faltung über die Zeit nicht über den Ort!

Kausalität: $\chi_e(\underline{r}, \underbrace{t-t'}_{\Delta t}) = 0$, falls ~~$t' > t$~~ !
 Δt muß also positiv sein!

Fouriertransformation von \textcircled{P}

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

analog für $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und $\chi_e(\underline{r}, t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ & = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\omega' \hat{\chi}_e(\underline{r}, \omega') e^{-i\omega'(t-t')} \\ & \quad \cdot \int d\omega \hat{\underline{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t'} \end{aligned}$$

benutze: $\frac{1}{2\pi} \int dt' e^{-i(\omega-\omega')t} = \delta(\omega-\omega')$

→ Die rechte Seite wird

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int dt \tilde{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Vergleiche linke und rechte Seite =

$$\underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega)$$

Produkt im Frequenzraum

Häufig kann man Ortsabhängigkeit vernachlässigen!

$$\Rightarrow \underline{\tilde{P}}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\omega) \underline{\tilde{E}}(\omega)$$

~~falls~~ Annahme jetzt: $\tilde{\chi}_e(\omega)$ bekannt

(mit dem Kopierschere Modell s. später!)

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_e(\omega)$$

$$\begin{array}{l} \text{(komplexe) dielektrische} \\ \text{Funktion} \end{array} = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega)$$

\uparrow reell \uparrow reell

es gilt:

$$\circ \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(t') e^{i\omega t'}$$

↗
Kausalität

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt' \chi_e(t') e^{i\omega t'}$$

• Beachte: $\chi_e(t)$ ist reell!
(reelle Antwortfunktionen!)

$$\Rightarrow \varepsilon^*(\omega) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int dt' \chi_e(t') e^{-i\omega t'} = \varepsilon(-\omega)!$$

Folgerungen für Wellenausbreitung?

wir hatten gesehen:

$$k = \frac{n}{c} \omega \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \\ = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2}$$

Jetzt: ϵ und damit n frequenzabhängig
und typischerweise komplex!

S. Notation
in Kap. VI.7,
aufm. dass hier
alles frequenzab-
hängig!

also Brechungsindex:

$$n \rightarrow \hat{n} = \bar{n}(\omega) + i\gamma(\omega)$$

$$n^2 \rightarrow \hat{n}^2 = (\bar{n}(\omega) - i\gamma(\omega))^2 + 2i\bar{n}(\omega)\gamma(\omega)$$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

$$\Rightarrow \epsilon'(\omega) = \bar{n}^2 - \gamma^2$$

$$\epsilon''(\omega) = 2\bar{n}\gamma$$

auflösen:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}$$

Spezialfälle

• $\epsilon'' = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0$

$\Rightarrow \hat{n} = \bar{n} = \sqrt{\epsilon'}$ rein reeller Brechungsindex

• $\epsilon'' > 0$

$\Rightarrow \gamma > 0$

„Absorption“, Energiedissipation

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$
heißt „Transparenzgebiet“ der Substanz
(wenig Absorption)

Weitere Folgerung aus der Frequenzabhängigkeit
⇒ bezgl. der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Annahme: $n = n(\omega)$

$$\underbrace{\operatorname{Re} k}_{\text{Realteil der Wellenzahl}} = \frac{\omega}{c} \bar{n}(\omega)$$

falls \bar{n} tatsächlich von ω abhängt, ~~dann gilt~~
⇒ „nichtlineare Dispersion“

Folgerungen:

betrachte die sogenannte Gruppengeschw.

$$v_G := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega \bar{n}(\omega))} = \frac{c}{\bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega}}$$

$k' = \operatorname{Re} k$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \neq \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

falls $\frac{dn}{d\omega} \neq 0$

„Background“ zur Gruppengeschwindigkeit

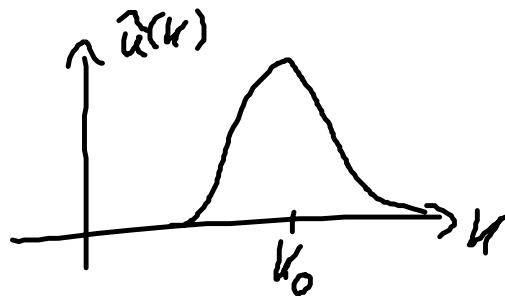
betrachte Welle der Form

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{u}(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

„Wellenpaket“ !

$\tilde{u}(k)$: Gewichtsfunktion

$$\omega = \omega(k)$$



Schwer „gepunkt“ !

⇒ entwickle in Expante

$$\omega(k) = \frac{\omega(k_0)}{\omega_0} + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \mathcal{O}(k^2)$$

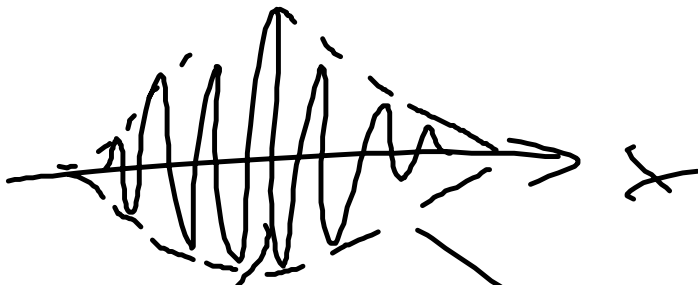
$$\text{also } \omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) v_G(k_0) + \mathcal{O}(k^2)$$

$$\Rightarrow e^{i(kx - \omega t)} \approx e^{ik_0 x} e^{i(k - k_0)x - \omega_0 t - (k - k_0)v_G(k_0)t}$$

Einsetzen in ~~den~~ Ansatz für das Wellenpaket

$$\Rightarrow u(x,t) \approx e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k) e^{i(k - k_0)x - (k - k_0)v_G(k_0)t}$$

$$= e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \bar{u}(x - v_G t)$$



\bar{u} bewegt sich mit Geschw. v_G !

Punkte im Inneren bewegen sich mit

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k}$$

Kramers - Kronig - Relationen

⇒ allgemeingültige Zusammenhänge
zwischen Real- und Imaginärteil
der dielektrischen Funktion

Wichtig: Diese Relationen folgen aus der Kausalität
der entsprechenden Antwortfunktion in der
Zeitdomäne

Herleitung mittels Funktionentheorie

Kausales

Hauptwert
(principal value)

$$\underbrace{\varepsilon'(\omega) - 1}_{\operatorname{Re} \tilde{\chi}_e(\omega)} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\underbrace{\varepsilon''(\omega)}_{\operatorname{Im} \tilde{\chi}_e(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

dabei ist

$$P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

Integrand hat Pol bei $\omega' = \omega$

Die Kramers - Kronig - Relation erlaubt also die Berechnung des Real - aus dem Imaginärteil und umgekehrt!

VI, 9, Mikroskopisches Modell der Dispersion.

Ausgangspunkt.

mikroskopisches Modell zur statischen elektrischen Suszeptibilität eines Atoms (Kap ~~III~~ VI.4)

betrachte wieder Schwingende Ladung
(Elektron)

$$\ddot{\underline{r}}(t) + \omega_0^2 \underline{r}(t) + \gamma \dot{\underline{r}}(t) = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}, t)$$

mit \underline{r} : Verbindungsvektor zwischen dem Schwerpunkt
der positiven und negativen Ladung!
(Kern)

$$\text{und } \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$$

γ : Dämpfungs-Konstante („Reibsystem“) $\gamma > 0$
da $-\gamma \dot{\underline{r}}$ eine Reibungskraft
entspricht

• Der Dämpfsystem reflektiert
(approximativ!) Einflüsse aus der
Umgebung!
↑
Störgröße

• Das Modell heißt „Lorentz-Oszillator“

Erinnerung an den statischen Fall.

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} = 0 \Rightarrow \underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{lokal}}, \text{ daraus } \underline{p} = Ze n \underline{r} \quad \text{induziertes Dipolmoment}$$

Polarisation:

$$\underline{P} = n \underline{p} = n \alpha \underline{E}^{\text{lokal}}$$

↑
Teilchendicke!

$$\text{mit } \alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$$

(s. Kap. VI.4) „statische Polariserbarkeit“

Dynamisch:

$$\underline{E}^{\text{lokal}} = \underline{E}^{\text{lokal}}(t) = \underline{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\underline{P} = \underline{P}_0 e^{-i\omega t}$$

Keine
expliziten
Abhängigkeits-
werte!

benutze

$$\underline{P} = n Ze n \underline{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{P}}(\epsilon) + \gamma \dot{\underline{P}}(\epsilon) + \omega_0^2 \underline{P}(\epsilon)$$

$$= n \frac{ze^2}{m_e} \underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}, t)$$

$$\text{definiere: } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$$

$$\ddot{\underline{P}} + \gamma \dot{\underline{P}} + \omega_0^2 \underline{P} = \epsilon_0 \omega_p^2 \underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}, t)$$

$$\text{benutze: } \dot{\underline{P}} = -i\omega \underline{P}, \quad \ddot{\underline{P}} = -\omega^2 \underline{P}$$

Einsetzen:

$$\left(-\omega^2 - \gamma i\omega + \omega_0^2 \right) \underline{P}_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 \underline{E}_0$$

$$\rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i\omega \right)} \underline{E}_0 \quad (*)$$

definiere frequenzabhängige Polarizierbarkeit

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i\omega}$$

$$\left(\text{beachte: } \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha(\omega) = \alpha \right)$$

oder Ausdruck aus
Kap. VI. 4.

Vergleiche mit Definition der
dielektr. Suszeptibilität

$$\underline{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}(\omega)$$

benutze die Lorentz-Beziehung (s. Kap ~~VI~~ VI.4)

$$\underline{E}^{\text{total}} = \underline{E}_0 = \underline{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

Einsetzen in (*)

$$\underline{P}_0 \left(1 + \frac{\alpha(\omega)}{3} \right) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

$$\Rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}} \underline{E}$$

$$\rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}}$$

Vergleichen
das in Kap VI.4.
hergeleitete
Zusammenhang!

Beachte:

$$\alpha(\omega) \sim \omega_p^2 \sim n$$

↑ Dicke!

Plasmafrequenz!

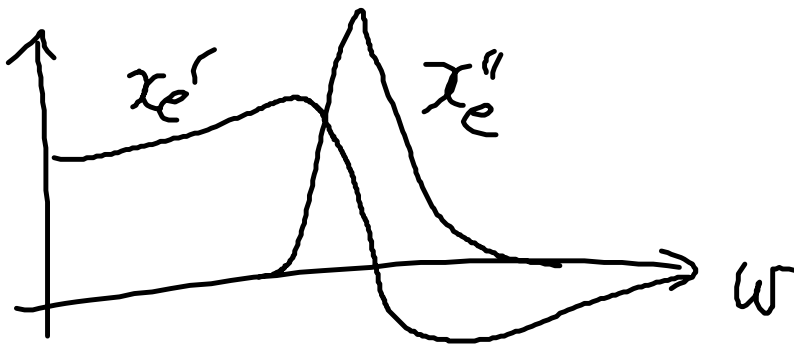
benutze: $\frac{x}{1+x/3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} x$
(Taylor)

Im Limes kleiner Dichten gilt also

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega) &= \alpha(\omega) \\ &= \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i \omega} \\ &= \chi_e'(\omega) + i \chi_e''(\omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \chi_e'(\omega) &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \chi_e''(\omega) &= \frac{\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \right.$$

Komplexe
dielektrische
Suszeptibilität
(daraus
 $\chi_e'(\omega), \chi_e''(\omega)$)



Resonanz !