

Wb:

a) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) + \nabla \cdot \vec{j}(r, t) = 0$$

(Ladungserhaltung)

Führe neuen Vierervektor ein:

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \\ = (c\rho, \vec{j})$$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (j^0)$$

$$+ \nabla \cdot \vec{j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} =$$

$$j^\mu = \int_0 u^\mu \text{ Ladungsdichte}$$

Ladungsdichte

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Kontinuitätsgleichung ist
Ladungserhaltung (da beide Seiten skalare!)

b) Elektromagnetische Potentiale

wir haben:

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\underline{E} = -\nabla \phi - \dot{\underline{A}}$$

es folgt sofort: $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

$$\nabla \times \underline{E} = -\nabla \times \dot{\underline{A}} = -\dot{\underline{B}}$$

homogene Maxwell-Gl. !

Erdinvarianz:

$$\phi \rightarrow \phi - \dot{\chi}(t, \underline{x})$$

$$\underline{A} \rightarrow \underline{A} + \nabla \chi(t, \underline{x}) \quad \text{skalares Potential}$$

Loose-Eichung: Wähle $\chi(t, \underline{x})$ so

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$$

→ Wellengleichungen:

$$\square \underline{A} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$(*) \quad \square \phi = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\Leftrightarrow \square \left(\frac{1}{c} \phi \right) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{1}{c} \phi \right) = -\mu_0(\rho) \quad \left[c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \right]$$

man erkennt: Die rechten Seiten enthalten gerade die Komponenten von j^μ !

beachte: $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -(\partial_\mu \partial^\mu)$ Skalar!

⇒ führe als weiteren Vierervektor ein:

$$\begin{aligned} A^\mu &= \left(\frac{1}{c} \phi, A_x, A_y, A_z \right) \\ &= \left(\frac{1}{c} \phi, \underline{A} \right) \end{aligned}$$

aus $\textcircled{4}$:

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

Vierer-Wellengleichung !

Laurentz eichung:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} A^0 + \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

mit

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

c) Tetra

⇒ werden formuliert als
Vierereisen 2. Stufe, der drei
Komponenten von \underline{E} und \underline{B} gleichrangig erfasst!

Ausgangspunkt :

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}, \quad \underline{E} = -\nabla \Phi - \dot{\underline{A}}$$

betrachte Komponenten von \underline{B} :

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \\ \partial^\mu &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \end{aligned}$$

analog:

$$B_y = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3)$$

$$B_z = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

Komponenten von \underline{E} :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} A^x = -c \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} \phi \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) \\ &= c(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1) \end{aligned}$$

analog:

$$E_y = c(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2), \quad E_z = c(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3)$$

Führe ein:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

„Feldstärke-Tensor“

Vierertensor 2. Stufe (Kontравariant)

offensichtlich gilt.

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \Rightarrow \text{Diagonalelemente sind Null!}$$

explizit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Zugehöriger Kovariante Tensor:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

metrischer Tensor!

Beachte:

Beachte Wechsel des Inertialsystems ($\Sigma \rightarrow \Sigma'$)

$$(F^{\mu\nu})' = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \quad (\text{Kap III. 3/4})$$

↳ Matrix der Lorentztransformation (bekannt!)

\Rightarrow Beim Wechsel des Inertialsystems
 mischen sich die Komponenten von
 $F^{\mu\nu}$ — und damit ~~das~~ die
 Charaktere der Felder!

Konkret findet man (hier ohne Herleitung)

$$\underline{E}' = \gamma (\underline{E} + c (\underline{\beta} \times \underline{B})) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E})$$

$$\underline{B}' = \gamma (\underline{B} - \frac{1}{c} (\underline{\beta} \times \underline{E})) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E})$$

mit $\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}$
 oder: $\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E})$?

beachte auch:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(\underline{B}^2 - \frac{1}{c^2} \underline{E}^2 \right)$$

Vierer-Skalar!

\Rightarrow bleibt unbeeinflusst von einer
 Lorentztransformation!

d) Maxwell-Gleichungen

betrachte zunächst drei inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \underline{E} = \rho_{\text{ext}} \Leftrightarrow \nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0} \underline{E} \right) = \mu_0 c \rho = \mu_0 j^0$$

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \underline{E} \right) = \mu_0 \underline{j} = \mu_0 \begin{pmatrix} j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}$$

Rechts stehen drei Komponenten vom Vierervektor j^μ

Linke Seite?

"Produkt":

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \underline{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_\alpha F^{\alpha 0} \end{aligned}$$

Weiter:

$$\left[\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \underline{E} \right) \right]_x$$

$$= \frac{\partial B_2}{\partial y} - \frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} E_x \right)$$

$$= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

analog für die y - und z -Komponente!

Zusammenfassung:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta \quad (*)$$

inhomogene
Maxwellgleichungen

$$\beta = 0, 1, 2, 3$$

Bemerkungen:

• Linke Seite von $(*)$:

Verjüngter (Kovarianter) Tensor
dritter Stufe

$\hat{=}$ (Kontравarianten)

Viervektor

— wie auf der rechten
Seite von $(*)$!

- Eine Lorentztransformation wirkt sich auf beide Seiten gleich aus!

⇒ Die (inhomogenen) Maxwellgleichungen gelten in (allen) Inertialsystemen!

homogene Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{1}{c} \underline{E} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

„problem“:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} \\ &= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

benutze

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$\partial_\mu = -\partial^\mu$$

$$\mu = 1, 2, 3$$

$$\left[\nabla \times \frac{1}{c} \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \right]_x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{c} E_z \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c} E_y \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\
&= \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23} \\
&= -(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23}) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

analog für y - und z -Komponente

Zusammenfassung:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$$

homogenen Maxwell-Gl. " " α, β, γ beliebig aus $0, 1, 2, 3$

Bemerkungen:

- Alle Terme sind Tensor gleicher Stufe
 \Rightarrow Die homogenen Gleichungen sind wieder forminvariant!

• Spezialfall: $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow \partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \underbrace{\partial^\alpha F^{\gamma\alpha}}_{-F^{\alpha\gamma}} + \underbrace{\partial^\gamma F^{\alpha\alpha}}_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial^\alpha (F^{\alpha\gamma} - F^{\alpha\gamma})}_0 = 0$$

trivial!

\Rightarrow Die Indizes α, β, γ sollten alle verschieden sein, damit wirklich die homogenen Maxwell-Gl. herauskommen!

VII. 9. Bewegte Punktladungen

- 2 Inertialsysteme:

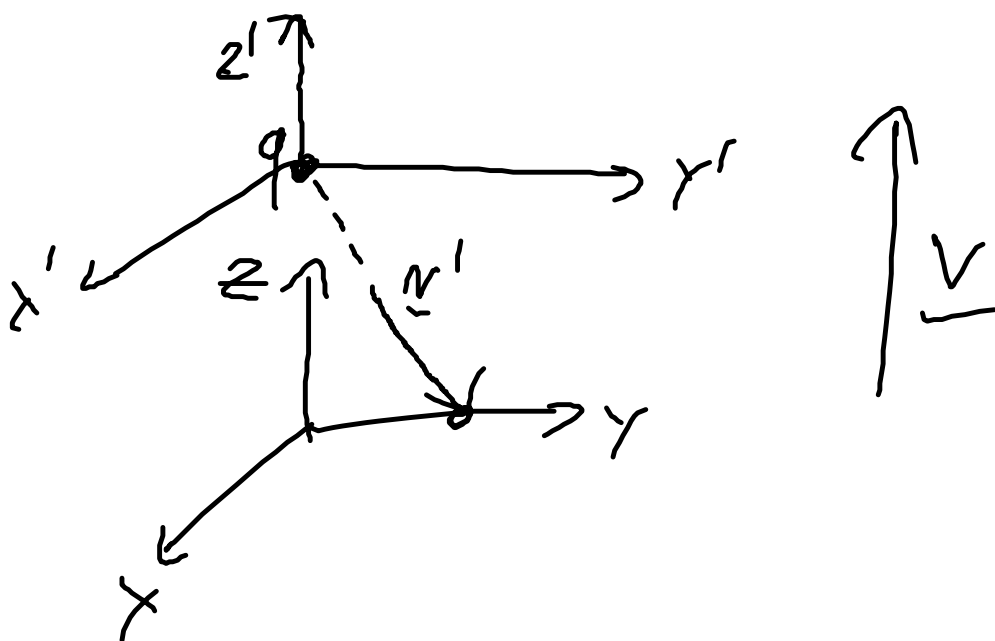
$$\Sigma' \text{ bewegt sich mit } \underline{v} = v \hat{e}_z = \text{const}$$

- Im Ursprung von Σ' ruht Ladung q

- In Σ sei ein "Beobachter"

mit Position: $\underline{r}_p = (0, y_p, 0)$

entsprechend Position
in Σ' : $\underline{r}' = (0, y_p, -vt')$



Frage: Welcher Felder sieht der Beobachter?

Zunächst: Felder in Σ' (Ruhesystem der Ladung)

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}'}{r'^3}$$

$$\underline{B}' = 0$$

radiale, isotrope Feld einer Punktladung

beachte:

die Beobachterposition ändert sich
(von Σ' aus gesehen) mit der Zeit

$$\rightarrow \underline{E}' = \underline{E}'(t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} (0, y_p, -vt')$$

mit $r' = \sqrt{y_p^2 + v^2 t'^2}$

Felder in Σ ?

(siehe Transformationsformeln in Kap. VII.8)

~~unter~~ benutze $\underline{v} = -v \hat{e}_z$

$$E_x = \gamma (E_x' + \beta c B_y') = 0$$

" "

$$E_y = \gamma (E_y' - \beta c B_x') = \gamma E_y' = \frac{\gamma y_p}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t'^2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$E_z = E_z' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\gamma vt')}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t'^2}}$$

Schlüsselfeld:

$$B_x = \gamma (B_x' - \beta/c E_y') = -\gamma \beta/c E_y' = -\beta/c E_y \neq 0$$

$$B_y = B_z = 0$$

Für allgemeine $\underline{v} = \text{const}$

folgt mit $\underline{B}' = 0$

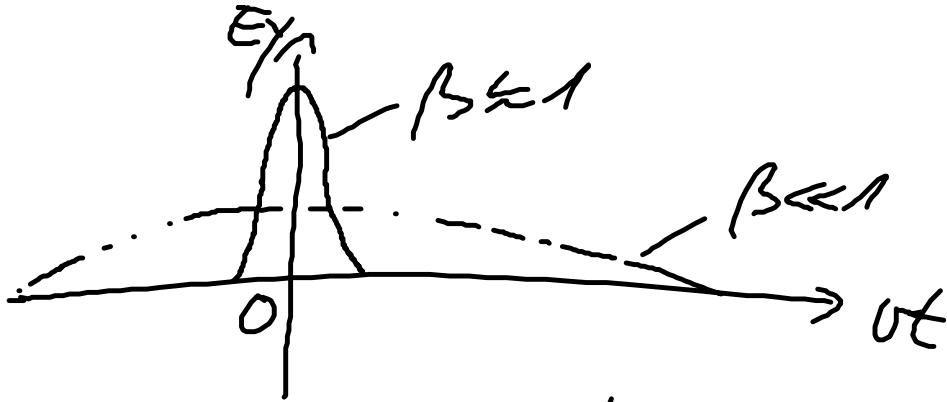
$$\underline{B} = \mu_0 \frac{\gamma}{c} \left(\frac{\underline{v}}{c} \times \underline{E}' \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma}{r'^3} (\underline{v} \times \underline{r}') \quad \text{" "}$$

Für $\gamma \rightarrow 1$ ($\beta/c \rightarrow 0$) entspricht dies dem bekannten Gesetz von Biot-Savart.

Bemerkung zum \underline{E} -Feld in Σ

- Die "Transversalkomponente" E_y ist nur in einem kleinen Zeitintervall von Null verschieden.



$$\beta = \frac{v}{c}$$

• ~~Analyse~~ Ähnliche für die "longitudinal Komponente" E_z

