

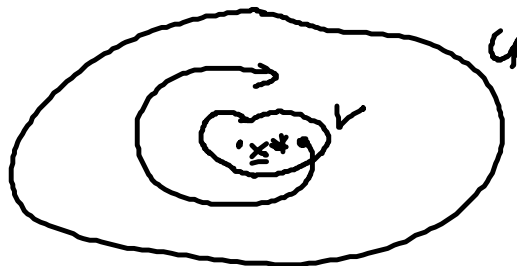
1.2. Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

Sei \underline{x}^* Fixpunkt des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def: \underline{x}^* heißt stabil (oder Ljapunov-stabil),
wenn zu jeder Umgebung U von \underline{x}^* eine Umgebung V
von \underline{x}^* existiert, so dass

$$\underline{x} \in V \implies \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$

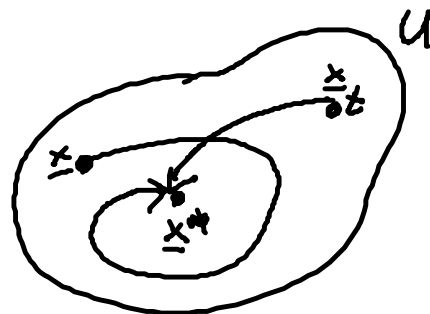


Def.: \underline{x}^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu \underline{x}^* eine Umgebung U ex., so dass

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U \quad \text{für } 0 < t_1 < t_2 \text{ und}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$$

(U schrumpft mit wachsenden t auf \underline{x}^* zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen \Downarrow)



Liouville'scher Satz für
Hamiltonische Systeme)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

• Kriterium für (Lyapunov)-Stabilität (lokal):

Wenn \underline{x}^* stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen positiven Realteil.

Bsp: Fixpunkt a) $q=0$ des Pendels mit/ohne Reibung

o Hinreichende Bed. für asymptotische Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negativen Realteil.

Bsp: Fixpunkt a) des Pendels mit Reibung

Bsp für Instab.: Fixpunkt b)

Allg. Systeme mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A} \right]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \underline{F}$$

Fallunterscheidung

a) Stabiler Fokus: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$
Strudelzentrum $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

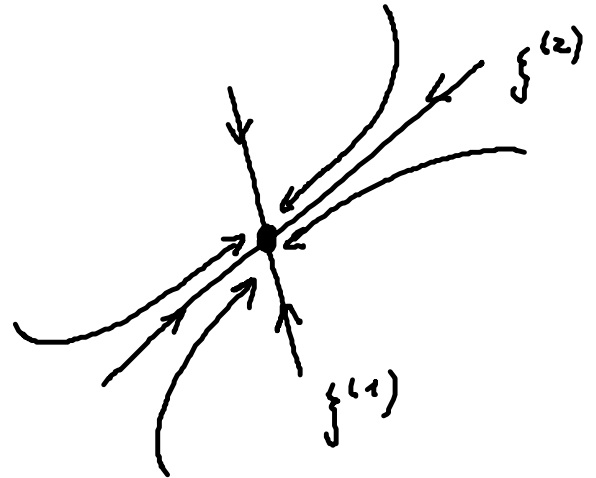
$$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \quad \text{"gedämpfte Osz. im Phasenraum"}$$

b) Instabiler Fokus: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

$$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega \quad (\lambda_0, \omega > 0) \quad \text{entdämpfte Osz.}$$

c) Stabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$
 $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R} \quad \text{exp. Zufall}$$



• fast alle Projektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

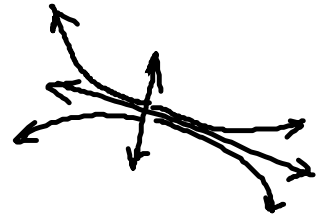
NB: Da die Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.d. nicht senkrecht zueinander.

d) Instabiler Knoten : $\det A > 0$, $\text{tr} A > 0$

$$(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$$

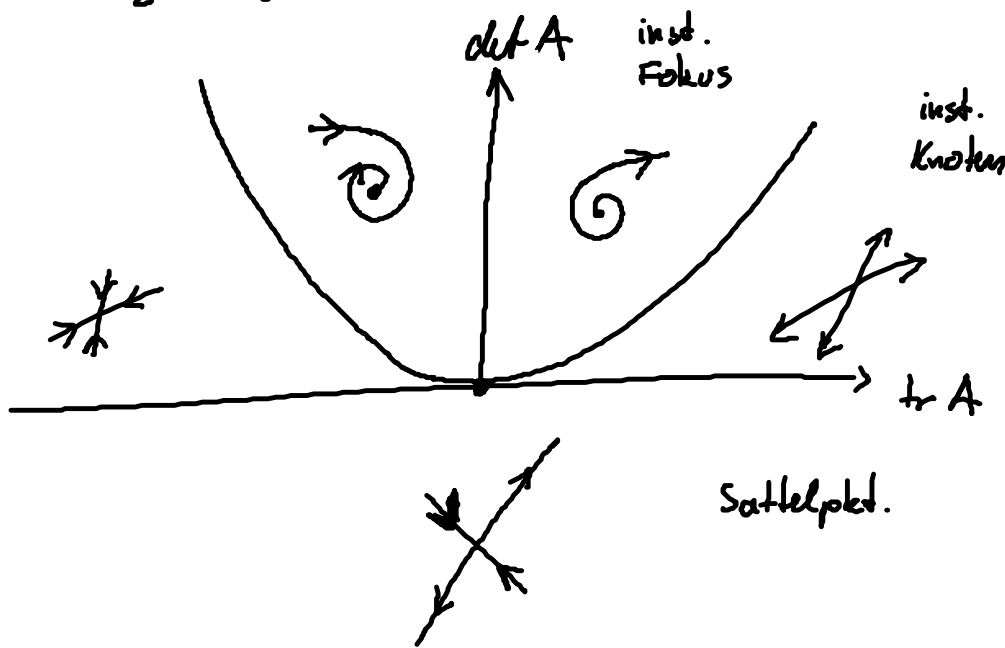
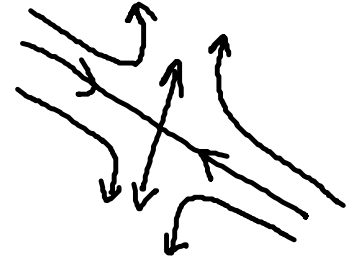
$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

exp. Entdämpfung



e) Sattelpunkt : $\det A < 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$



Grenze zwischen den 5 Bereichen : entartete Fälle

- lin. Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpunkt nötig

$\text{tr} A = 0$, $\det A > 0$ entweder Zentrum



oder schwach stabiler / instabiler Fokus

- qualitative Änderung im Verhalten des Flusses möglich
(Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)

1.2.1 Speziell Hamilton'sche Vektorfelder :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \begin{array}{l} \text{f. Freiheitsgrade} \\ \text{z. dyn. Größen} \end{array}$$

Linearisierung um Fixpunkt \underline{x}^* , $\delta \underline{x}(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta \dot{\underline{x}} = A \delta \underline{x} \quad \delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) \delta x_k$$

$$\text{tr} A = \text{div } \underline{F} = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0$$

- Aus $0 = \text{tr} A = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist. (sondern Lyapunov-Stabil)

Beweis: sonst müssen alle $\text{Re } \lambda_i < 0$ sein

$$\rightarrow \text{tr} A = \sum_i \text{Re } \lambda_i + \underbrace{i \sum \text{Im } \lambda_i}_0 < 0 \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array}$$

(konj. komplex)

Nicht asymptotisch stabil falls kein $\text{Re } \lambda_i > 0$

$$\rightarrow \text{nur } \text{Re } \lambda_i = 0 \quad \lambda_i = \pm i\omega \quad (\text{Zentrum})$$

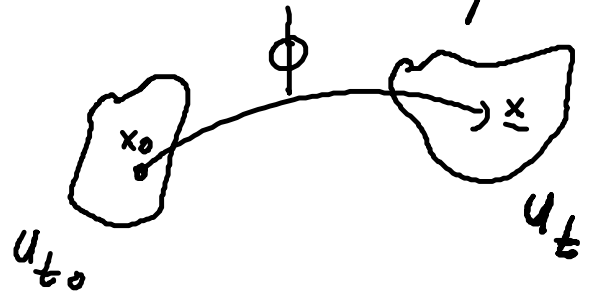
Falls $f=1$ ($n=2$): Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpunkte (falls $\det A < 0$) sein.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{F}(\underline{x}) \\ A &:= (DF)_* \end{aligned}$$

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus

$\text{tr} A = \text{div } \underline{F} = 0$ der Liouville'sche Satz der klass. stat. Physik

Phasenraumvolumen



$$\begin{aligned} V_t &= \int_{U_t} d^{2f} x \\ &= \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \det D\phi_t(x_0) \end{aligned}$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\text{div } \underline{F})_{x_0}} + O(t-t_0)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \phi_t(x_0) &= \underline{x}(t) \\ D\phi_t(x_0) &= \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \underbrace{\frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0} F_i} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + & \dots & \\ \vdots & 1 + & \\ & & 1 + \dots \end{pmatrix}$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int d^{2f} x_0 (\text{div } F) + O(t-t_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int d^2f x_0 \underbrace{(\operatorname{div} F)_{\underline{x}_0}}_0 = 0$$

Hamilton'sche
Systeme

- Phasenraumvolumina erhalten, d.h. Fluss inkompressibel!