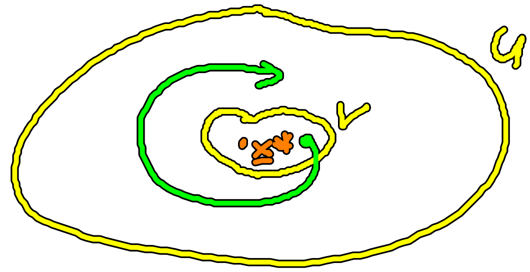
1.2. Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

Sei $\underline{x}^*$ Fixpunkt des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$

Def: $\underline{x}^*$ heißt stabil (oder Ljapunov-stabil),
wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ existiert, so dass

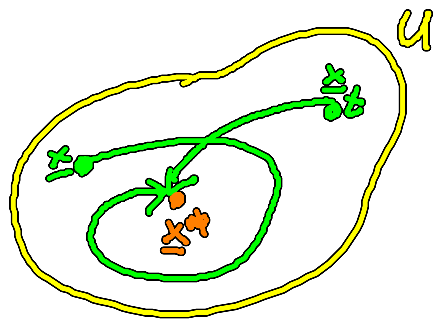
$$\underline{x} \in V \implies \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall\, t \geq 0$$



Def.: $\underline{x}^*$ heißt asymptotisch stabil, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U ex., so dass

$$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U \quad \text{für} \quad 0 < t_1 < t_2 \quad \text{und}$$

$$\lim_{t \to \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \qquad \forall \underline{x} \in U$$



(U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen, d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen ↯ Liouville'scher Satz für Hamiltonische Systeme)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn Phasenraumvolumina schrumpfen.

- Kriterium für (Lyapunov)-Stabilität (lokal):

Wenn $\underline{x}^*$ stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{\underline{x}^*}$ einen positiven Realteil.

Bsp: Fixpunkt a) $\varphi = 0$ des Pendels mit/ohne Reibung

∘ Hinreichende Bed. für asymptotische Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negativen Realteile.

Bsp: Fixpunkt a) des Pendels mit Reibung

Bsp. für Instab.: Fixpunkt b)

Allg. Systeme mit $n = 2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}\right]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21}$$

$$\operatorname{tr} A = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \underline{F}$$

Fallunterscheidung

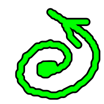
a) Stabiler Fokus: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A < 0$

Strudelpunkt $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$

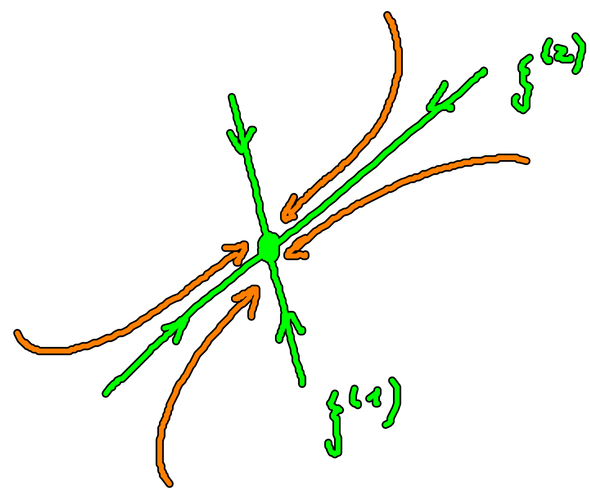
$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega \qquad (\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Osz. im Phasenraum

b) <u>Instabiler Fokus</u>: $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A > 0$,
$(\mathrm{tr}\, A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega \qquad (\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Osz.



c) Stabiler Knoten: $\det A > 0$, $\mathrm{tr}\, A < 0$
$(\mathrm{tr}\, A)^2 > 4 \det A$



$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array}\right\} \in \mathbb{R}$ exp. Zerfall

• fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

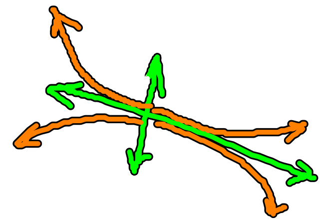
<u>NB</u>: Da die Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.a. <u>nicht</u> senkrecht zueinander.

d) Instabiler Knoten: $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$

$$(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$$

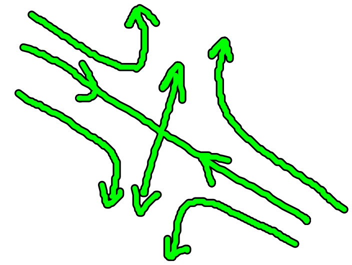
$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$$

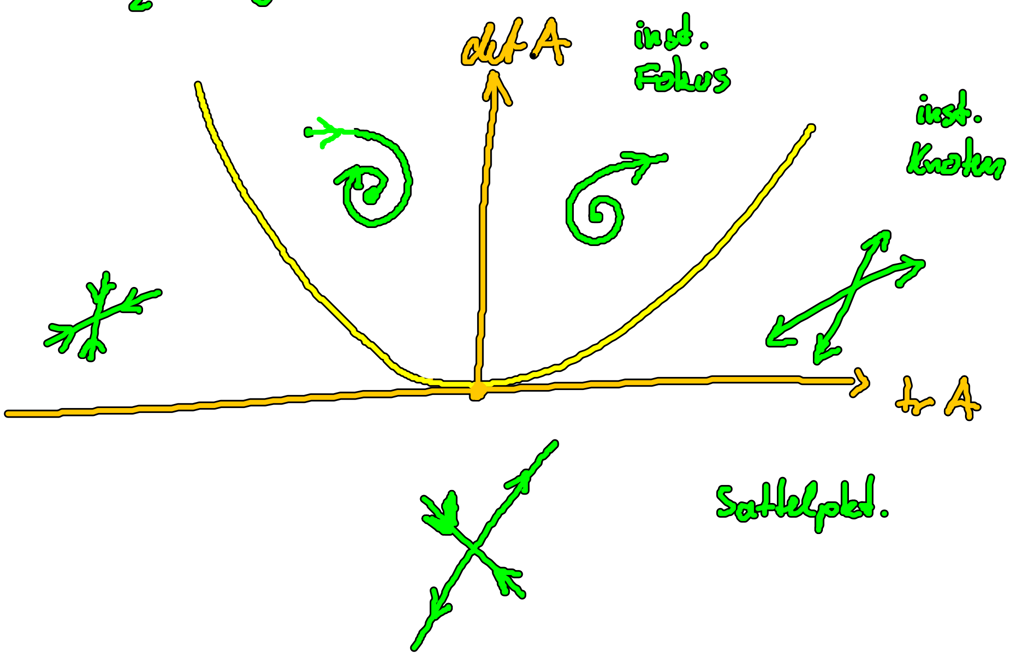
exp. Entdämpfung



e) Sattelpunkt: $\det A < 0$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$$





Grenze zwischen den 5 Bereichen: entartete Fälle

- lin. Stabilitätsanalyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpunkt nötig

$\underline{\operatorname{tr} A = 0,\ \det A > 0}$ entweder <u>Zentrum</u>

oder schwach stabiler / instabiler Fokus

- qualitative Änderung im Verhalten des Flusses möglich (Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)

1.2.1 Speziell Hamilton'sche Vektorfelder:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

f Freiheitsgrade
$2f$ dyn. Größen

Linearisierung um Fixpunkt $\underline{x}^*$, $\delta \underline{x}(t) = \underline{x} - \underline{x}^*$

$$\delta\dot{\underline{x}} = A\,\delta x \qquad \delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{2f} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k$$

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{div}\,\underline{F} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = 0$$

- Aus $0 = \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{2f} \lambda_i$ folgt, dass keine asymptotische Stabilität möglich ist. (sondern Lyapunov-stabil)

Beweis: Sonst müssen alle $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ sein

$$\rightarrow \mathrm{tr}A = \sum_i \mathrm{Re}\,\lambda_i + \underbrace{i\sum \mathrm{Im}\,\lambda_i}_{0} < 0 \qquad ↯$$

(konj. komplex)

Nicht asymptotisch stabil falls kein $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$

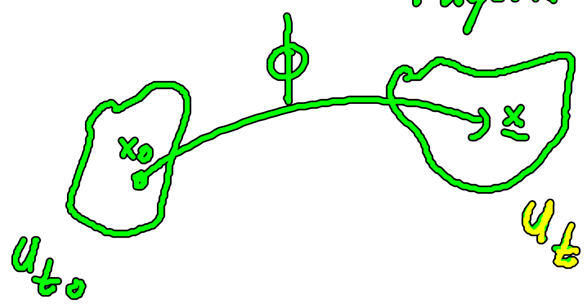
$\rightarrow$ nur $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ $\qquad \lambda_i = \pm i\omega$ $\qquad$ (Zentrum)

Falls $f=1$ $(n=2)$: Fixpunkte können nur Zentren (falls $\det A > 0$) oder Sattelpunkte (falls $\det A < 0$) sein.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(x)$$
$$A := (DF)_*$$

Für Hamilton'sche Systeme folgt aus

$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{div}\, \underline{F} = 0$ der Liouvill'sche Satz der klass. stat. Physik



Phasenraumvolumen

$$V_t = \int_{U_t} d^{2f} x$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \; \det D\phi_t(\underline{x}_0)$$

$$= \int_{U_{t_0}} d^{2f} x_0 \left[1 + (t-t_0) \underbrace{\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial x_0^i}}_{(\mathrm{div}\, \underline{F})_{x_0}} + O(t-t_0)^2 \right]$$

$$\phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t)$$

$$D\phi_t(x_0) = \left(\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^k} \right)$$

Taylor

$$\approx \underbrace{\frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^k}}_{\delta_{ik}} + (t-t_0) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k}}_{\frac{\partial}{\partial x_0} F_i} + \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1+ & \cdots & & \\ \vdots & 1+ & & \\ & & 1+ & \\ & & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= V_{t_0} + (t-t_0) \int d^{2f} x_0 \, (\mathrm{div}\, F) + O(t-t_0)^2$$

$$\frac{d}{dt} V_t = \lim_{t \to t_0} \frac{V_t - V_{t_0}}{t - t_0} = \int d^{2f} x_0 \underbrace{(\operatorname{div} F)_{\underline{x}_0}}_{0} = 0$$

Hamilton'sche Systeme

- Phasenraumvolumina erhalten, d.h. Fluss inkompressibel!