

1.2.2. Langzeitverhalten und Stabilität von dissipativen Systemen

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt \underline{x}^* umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int d^{2f}x (\operatorname{div} \underline{F})_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t$$

u_t

$$\Rightarrow V(t) = V_t = e^{\Lambda t} V_0$$

mit Phasenraumkontraktionsrate

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \operatorname{div} \underline{F} |_{\underline{x}^*} \\ &= \operatorname{tr} A \\ &= \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i\end{aligned}$$

Allg. gilt:

Def: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Bsp. für dissipatives System: Lorenzmodell

(abgeleitet aus der Temp. und Stromungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = \sigma x - y - xz$$

$$\dot{z} = \underbrace{(xy)} - bz$$

Linearisierung: $A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \text{tr} A = -(\sigma+1+b)$

$$\rightarrow v(t) = e^{-\underbrace{(\sigma+1+b)t}} v_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Phasenraumvolumina
schrumpfen monoton!

• Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen
(Maxwell - Bloch - Gl.)
sind "äquivalent" zu den Lorenzgleichungen

→ Übung A3

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme
wird durch Attraktoren bestimmt.

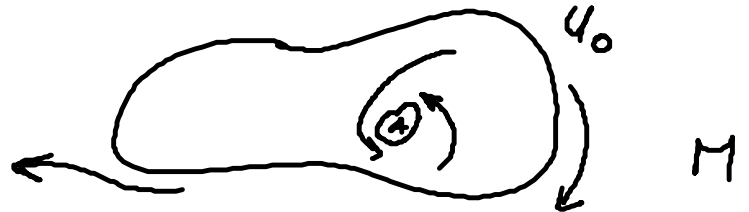
Def.: Sei \underline{F} ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.

Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante
($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt

Attraktor, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$
($t > 0$)

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0 \quad \exists T > 0$, so dass
 $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$)



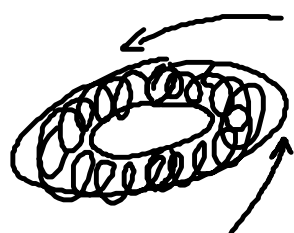
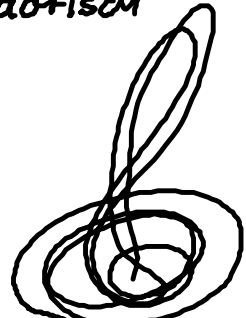


d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor A läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Beispiele für Attraktoren:

Mindestdim. n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktor- dimension	
1	stabiler Fixpunkt	0	$n=1$ <p>A horizontal line with a central dot representing a fixed point. Arrows on either side of the dot point towards it, indicating convergence.</p>

			$n=2$ 
2	stabiler Grenzzyklus	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch 2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
3	seltener Attraktor (strange)	$2 < d < 3$ fractal	chaotisch 

1.3. Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollparameter μ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert μ_c ändern
 → Bifurkation
 "Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit"

- Notwendige Bedingung: Nichtlinearität

- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → Untersuchung lineare Stabilität der Fixpunkte
 (im Fall von lokalen Bif.)

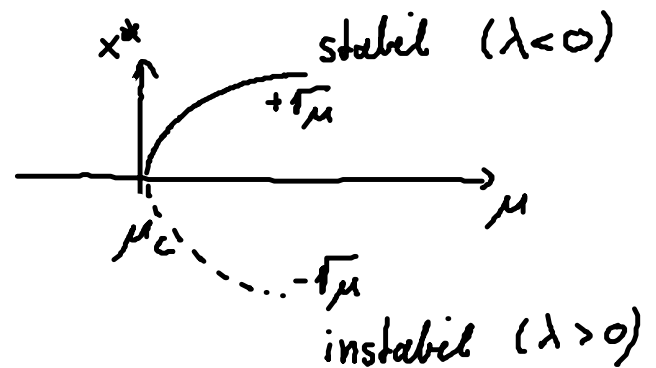
Klassifizierung von Bifurkationen

(A) Eigenwert - Null - Bifurkation

$$\begin{aligned} \lambda < 0 &\rightarrow \lambda > 0 \\ \det A > 0 &\rightarrow \det A < 0 \end{aligned}$$

(A1) Sattel - Knoten - Bifurkation

$$\boxed{\dot{x} = \mu - x^2}$$

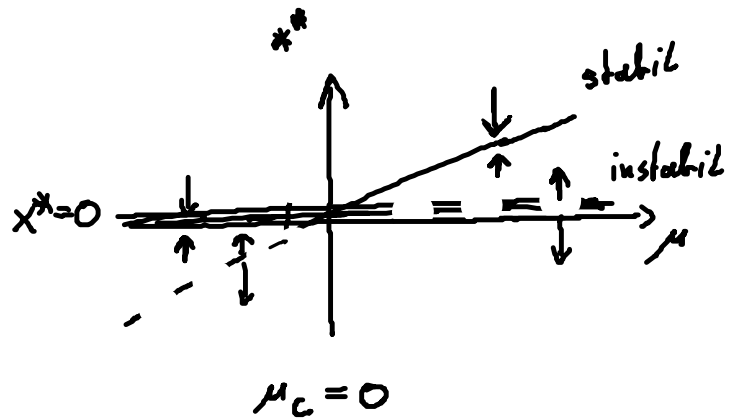


(A2) Transkritische Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

$$\delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$



- Stabilitätswechsel bei $\mu_c = 0$

(A3) Stimmungabel - Bifurkation

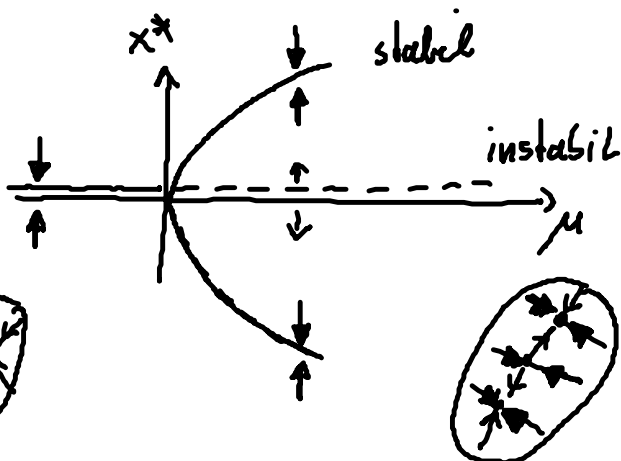
(pitchfork bifurcation)

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

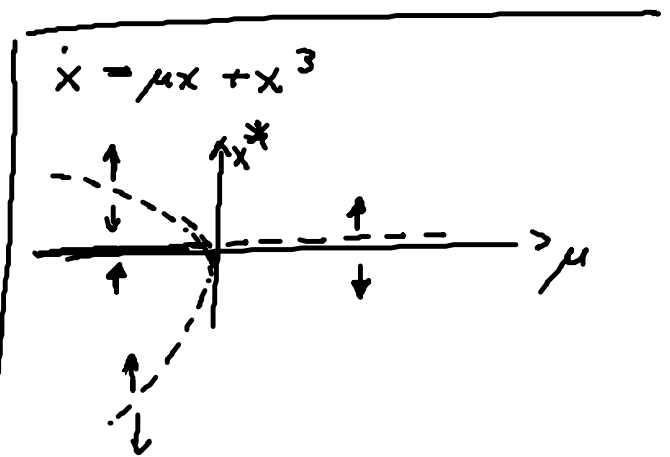
$$\delta \dot{x} = (\mu - 3x^{*2}) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} \pm \sqrt{\mu} & (\text{für } \mu > 0) \\ 0 & \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$$



supercritische Stimmung. Bif.



subkritische Stimmung. Bif.

(B) Hopf - Bifurkation (Andronov - Hopf)

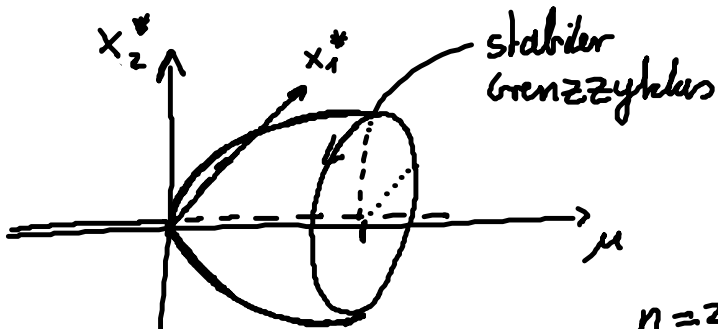
(superkritisch)

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$$

stabiler
Fokus

instabiler
Fokus + Grenz-
zyklus

mind. $n=2$ nötig



$$n=2: \text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$$

