1.2.2. Langzeitverhalten und Stabilität von dissipativen Systemen

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt $\underline{x}^*$ umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int d^{2f}x \left(\operatorname{div} \underline{F}\right)_{\underline{x}^*} = \Lambda \cdot V_t$$

u_t

$$\Rightarrow \boxed{V(t) = V_t = e^{\Lambda t} V_0}$$

mit Phasenraumkontraktionsrate $\Lambda := \operatorname{div} \underline{F}\big|_{\underline{x}^*}$

$$= \operatorname{tr} A$$

$$= \sum_i \operatorname{Re} \lambda_i$$

Allg. gilt:

Def: Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Bsp. für dissipatives System: Lorenzmodell

(abgeleitet aus der Temp. und Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit)

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$\dot{z} = xy - bz$

Linearisierung: $A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \mathrm{tr} A$
$= -(\sigma+1+b)$

$\rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$

Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!

- Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen (Maxwell-Bloch-Gl.) sind äquivalent zu den Lorenzgleichungen

$\rightarrow$ Übung A3

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

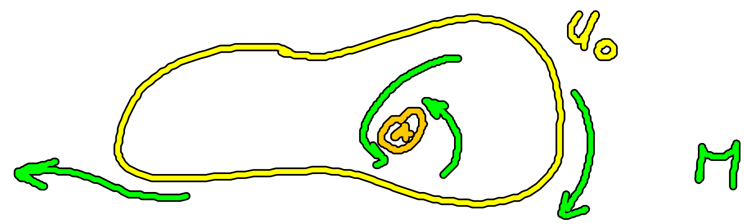
$\boxed{\text{Def.:}}$ Sei $\underline{F}$ ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$.

Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare Teilmenge $A \subset M$ heißt

Attraktor, falls

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ $(t > 0)$

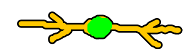
(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0$ $\exists\, T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ $(t > T)$

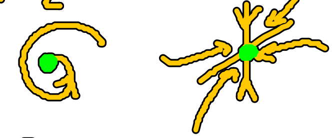
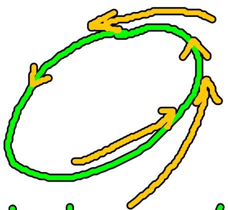
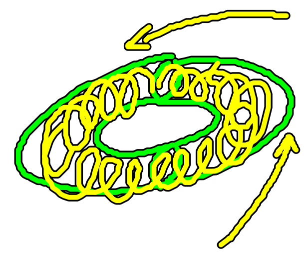
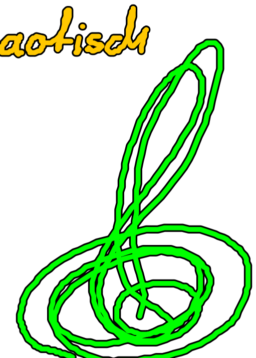


d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0, aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor A läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf M geben.

Beispiele für Attraktoren:

Mindestdim. n des Phasenraumes	Attraktor	Attraktor-dimension	
1	stabiler Fixpunkt	0	$n = 1$ 

			$n=2$ 
2	stabiler Grenzzyklus	1	 periodischer Orbit
3	stabiler Torus T^2	2	 quasiperiodisch 2 Frequenzen $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$
3	seltsamer Attraktor (strange)	$2 < d < 3$ fractal	chaotisch 

1.3. Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollparameter μ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert μ_c ändern

→ Bifurkation

"Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit"

- Notwendige Bedingung: Nichtlinearität
- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → Untersuche lineare Stabilität der Fixpunkte (im Fall von <u>lokalen</u> Bif.)

<u>Klassifizierung von Bifurkationen</u>

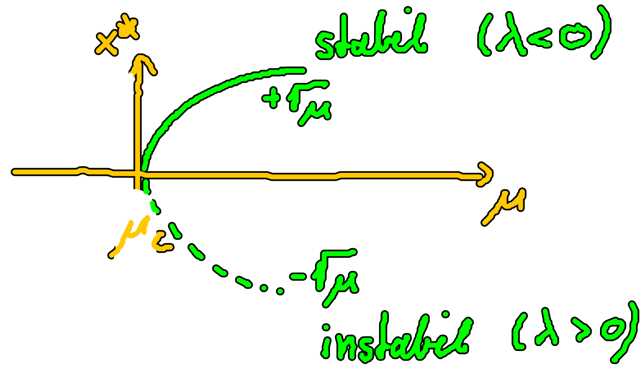
(A) Eigenwert - Null - Bifurkation

$\lambda < 0 \longrightarrow \lambda > 0$

$\det A > 0 \longrightarrow \det A < 0$

(A1) <u>Sattel - Knoten - Bifurkation</u>

$$\boxed{\dot{x} = \mu - x^2}$$

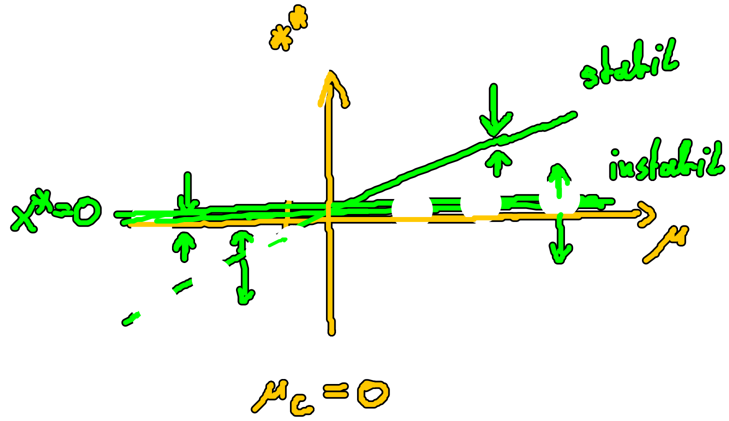


(A2) Transkritische Bifurkation

$$\boxed{\dot{x} = \mu x - x^2}$$

$$\delta\dot{x} = (\mu - 2x^*)\,\delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$



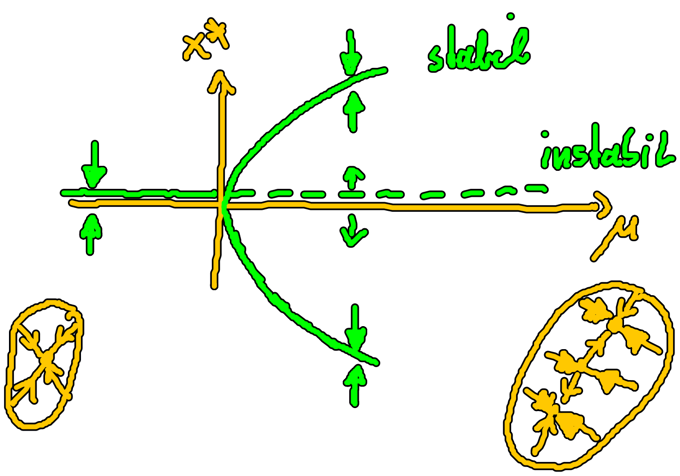
- Stabilitätswechsel bei $\mu_c = 0$

(A3) Stimmgabel - Bifurkation (pitchfork bifurcation)

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

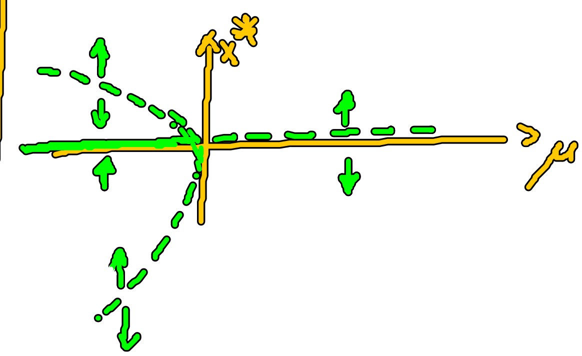
$$\delta\dot{x} = (\mu - 3x^{*2})\,\delta x$$

$$x^* = \begin{cases} \pm\sqrt{\mu} & (\text{für } \mu \geq 0) \\ 0 \end{cases} \qquad \lambda = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$$



superkritische Stimmg. Bif

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$



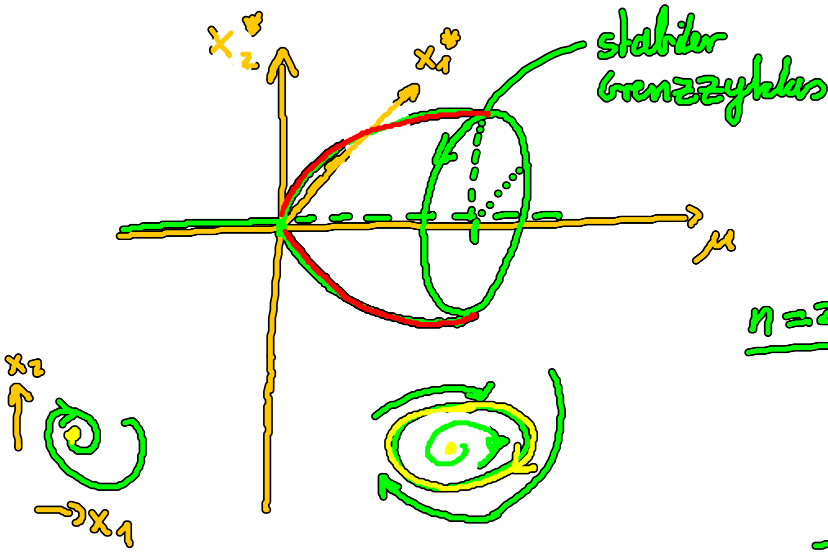
subkritische Stimmgabel Bif.

(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf)

(superkritisch)

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \lambda_0 < 0 \longrightarrow \lambda_0 > 0$$

stabiler Fokus → instabiler Fokus + Grenz-zyklus



mind. $n=2$ nötig

<u>$n=2$</u>: $\mathrm{tr}A < 0 \longrightarrow \mathrm{tr}A > 0$