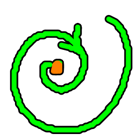
1.3. (Fortsetzung)

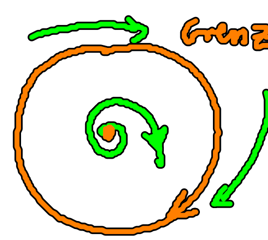
Klassifizierung von Bifurkationen

(B) Hopf-Bifurkation

$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0 < 0 \longrightarrow \lambda_0 > 0$



stab. Fokus



Hopf Normalform: generische Taylorentwicklung in der Nähe der Hopf-Bifurkation

(2D-Zentrums-Mannigfaltigkeit)

$$\boxed{\dot{z} = \Big(\underbrace{\lambda + i\omega}_{\text{linearer Anteil}} \underbrace{\mp (1+i\gamma)|z|^2}_{\text{nichtlinearer Anteil}}\Big) z}$$

$z = x + iy \in \mathbb{C}$

nichtlinearer Anteil $\Rightarrow$ Bifurkation eines Grenzzyklus

$$\delta\dot{z} = (\lambda + i\omega)\,\delta z$$

Fixpunkt bei $z = 0$
Eigenwert $\lambda + i\omega$

$\left.\begin{array}{l} \lambda < 0: \text{ stab. Fokus} \\ \lambda > 0: \text{ instab. Fokus} \end{array}\right.$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}\,A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{tr}\,A}{2}\right)^2 - \det A} = \lambda \pm i\omega$$

Transformation auf Amplitude r und Phase φ:

$$z(t) = r(t)\,e^{i\varphi(t)} \quad \rightarrow \quad \dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = \left(\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)r^2\right) r e^{i\varphi}$$

$$\dot{z} = F(r,\varphi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Re:}\quad \dot{r} &= (\lambda \mp r^2)\,r \\ \text{Im:}\quad \dot{\varphi} &= (\omega \mp \gamma r^2) \end{aligned}}$$

Hopf-Normalform

$\rightarrow$ "$-$" superkritischer Fall
"$+$" subkritisch

$$\dot r = 0 \;\to\; \underbrace{r = 0}_{\text{Fixpunkt}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{r^2 = \pm\lambda}_{\hookrightarrow\ \text{Einsetzen in } \dot\varphi} \quad (\lambda \gtrless 0) \quad \begin{matrix} \text{— superkrit.} \\ \text{— subkrit.} \end{matrix}$$

superkritisch

$$\dot\varphi = \omega - \gamma\lambda \qquad \text{Frequenz}$$

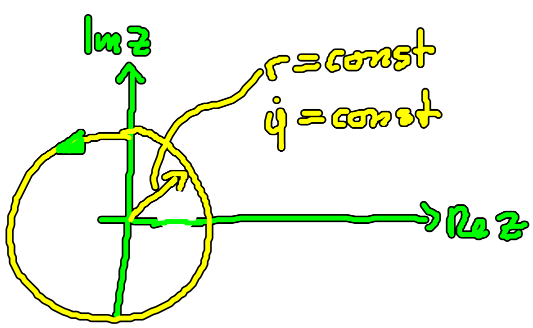
Integration $\Rightarrow$

$$\varphi = (\omega - \gamma\lambda)t$$

Lösungen: $r = 0$ (Fixpunkt)

$$z(t) = \sqrt{+\lambda}\; e^{i(\omega-\gamma\lambda)t} \qquad \text{für } \lambda > 0$$

Stuart-Landau-Oszillator



Im Bifurkationspunkt ($\lambda = 0$)

$$\boxed{\begin{matrix} \text{Amplitude} & r = \sqrt{\pm\lambda} \to 0 \\ \text{Frequenz} & \omega \neq 0 \end{matrix}}$$

Lineare Stabilität des Grenzzyklus

im allgemeinen mit Floquet-Theorie

$$\dot z = f(z) \quad , \quad \text{period. Orbit} \quad z^*(t) = z^*(t+T)$$

DGL

$$\delta\dot z = Df\big|_{z^*(t)}\,\delta z \qquad \text{mit} \quad Df(t) = Df(t+T)$$

also lin. ODE mit periodischen Koeffizienten

Lösungsansatz: $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$ mit $u_j(t) = u_j(t+T)$

$\underline{\text{Floquet-Moden}}$ $u_j(t)$

Floquet-Exponenten $\Lambda_j \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = Df\, u \quad , \quad \delta z(t) = U(t)\, \delta z(0)$$

Floquet-Multiplikatoren $\mu = e^{\Lambda T}$

= Eigenwerte von $U(T)$

<u>hier</u>: analytische Lösung möglich in r, φ:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma r & 0 \end{pmatrix}_{z^*(t)} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix}$$

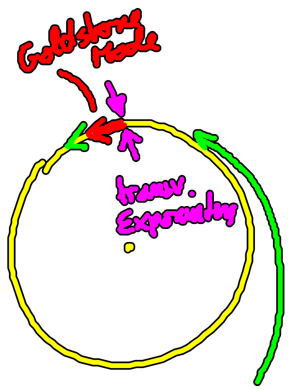
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ \mp 2\gamma\sqrt{\pm\lambda} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta\varphi \end{pmatrix}$$

Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von A:

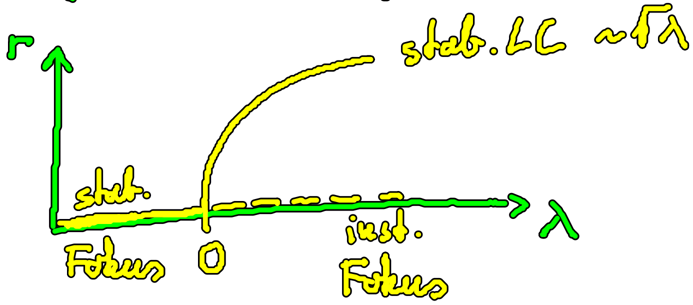
$$\Lambda^2 + 2\lambda\Lambda = 0$$

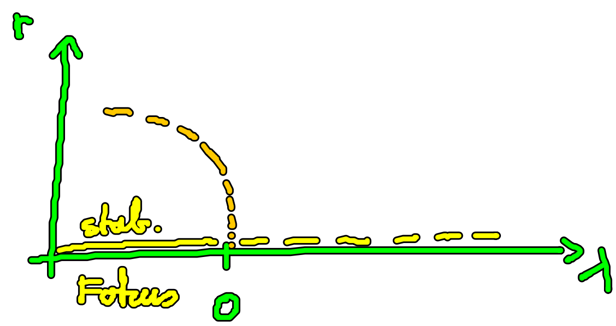
$$\Rightarrow \Lambda = \begin{cases} 0 & \text{Goldstone Mode} \\ \boxed{-2\lambda} & \lessgtr 0 \ (\lambda \gtrless 0) \end{cases}$$

transversale Floquet-Exponenten



Bifurkationsdiagramm:





superkritische Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + i\gamma)|z|^2)\, z$$

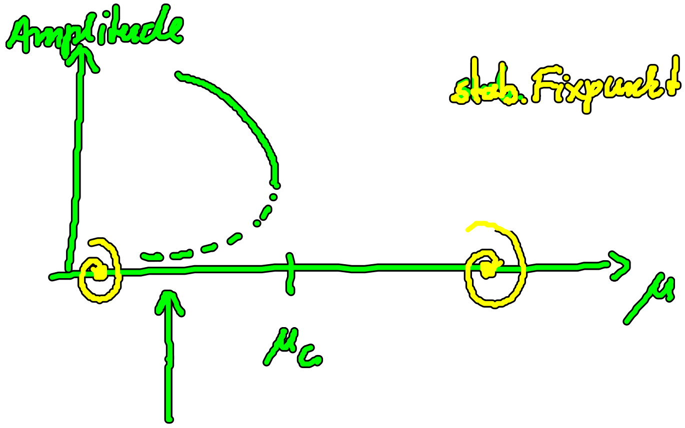
subkritische Hopf-Bifurkation

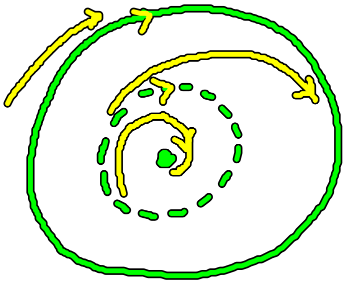
$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z^2|)\, z$$

(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklus

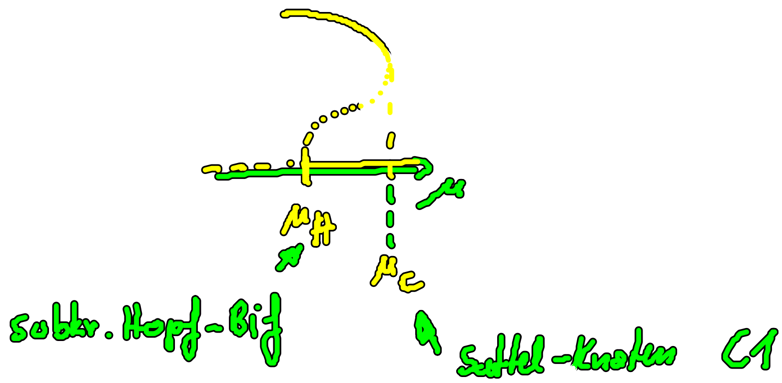
Startpunkt jetzt: Grenzzyklus, nicht Fixpunkt
keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

(C1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus



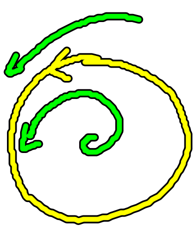


Bistabilität zwischen Fixpunkten und LC, häufig:

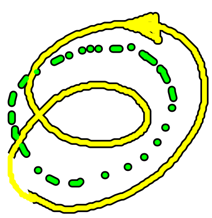


(C2) Perioden-Verdopplung (flip-Bifurcation
subharm. Bifurkation)

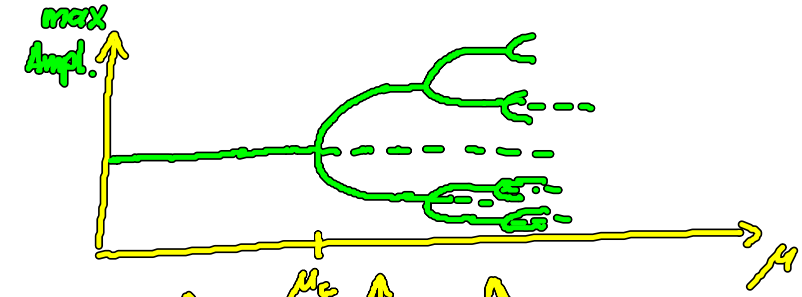
$\boxed{\text{mind. 3D Phasenraum}}$

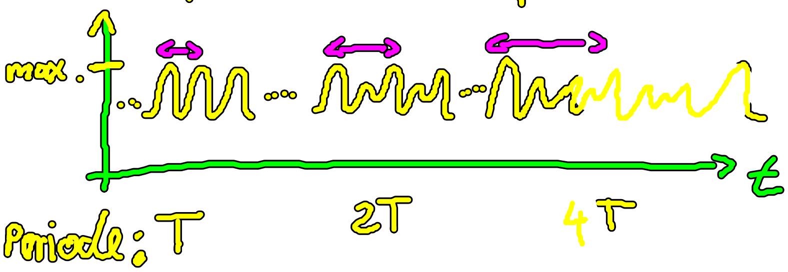


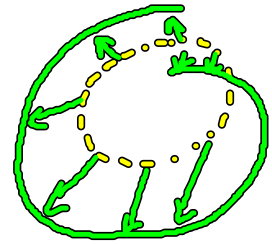
Periode-1
Grenzzyklus



Periode-2
LC







phase flip π nach 1 Umlauf

Torsion von benachbarten Trajektorien

Floquet-Exp

$$\Lambda = \lambda + i\omega$$

Bif. bei μ_c : $\lambda = 0$

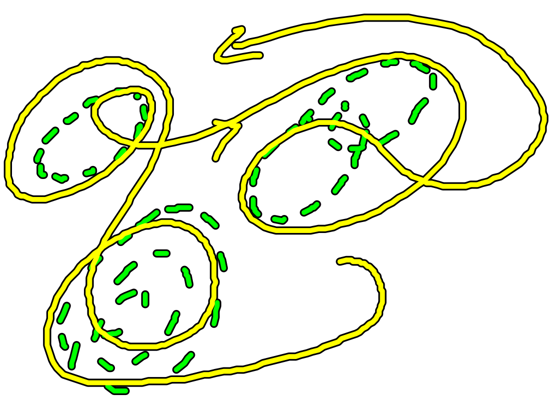
$$\omega T = \pi$$

Floquet-Multiplikator

$$\mu = e^{\Lambda T}$$

$$= e^{i\pi} = -1$$

- häufig Periodenverdopplungskaskade
  - $\rightarrow$ chaos (Feigenbaum-Szenario)
  - $\rightarrow$ unendliche viele instabile period. Orbits der Periode $2^n T$



chaos