2. Kontrollkonzepte

- klass. Kontrolltheorie
- Chaoskontrolle
- Quantenkontrolle

SFB 910: Control of Self-Organizing Nonlinear Systems

Symposium 30.11.2012 $15^{00} - 17^{00}$ H 3005

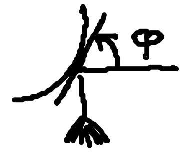
2.1 Offene u. geschlossene Steuerung

Lit.: F. Tröltzsch: Optimal Control of Partial Diff. Eqs. (AMS 2010)

Skript V. Mehrmann: www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS11/Kontrolltheorie

Jan Lunze: Regelungstechnik (Springer Lehrbuch 2008)

Beispiel: Steuerung einer Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist



Beweg.gl. $\dot{\varphi} = \omega$

$$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$$

Variablen: φ Drehwinkel
ω Winkelgeschw.

Parameter: J Trägheitsmoment
r Reibungskoeff.
k Verstärkungsfaktor

Steuervar.: u Spannung

Spannung u ⟶ $\boxed{\text{Verstärker}}$ ⟶ $\boxed{\text{Motor}}$ ⟶ Drehwinkel φ

Ziel: Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

⇒ Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des Systems $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anfangsbed. $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ex.

⇒ Kriterium: – zeitoptimale Lösung
– energieoptimale Lösung
...

- Theoret. / Mathemat. Grundlagen:

Schema: Eingangsdaten u input ⟶ $\boxed{\text{System}}$ ⟶ Ausgangsdaten y output

interne Dynamik: häufig unbekannt

Bsp.: Autofahren: Eingänge
– Gasgeben
– Bremsen
– Lenken

Ausgänge
- Tacho
- Drehzahlmessen

interne Dynamik (Motor, getriebe) unbekannt

Modell: $\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x},\underline{u})\\ \underline{y} &= \underline{g}(\underline{x},\underline{u})\end{aligned}}$ mit $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0$

$\underline{u}$: Steuerfunktion (control var., input)
$\underline{x}$: Systemzustand (dynam. var.)
$\underline{y}$: messbare Ausgangsgrößen (output)

$\left.\begin{array}{l}\underline{f} : \text{funktionale Zus.hang des Systems}\\ \underline{g} : \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{der Messung}\end{array}\right\}$ evt. schwierig zu ermitteln, interdiszipl. Zusammenarbeit

Def.: Ein linear~~es~~ Steuerproblem hat die Form

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\,\underline{u}(t)\\ \underline{y}(t) &= \underline{\underline{C}}(t)\,\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\,\underline{u}(t)\end{aligned}}$$

$t \in [t_0, \infty)$
$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$
Ausgangsgl. (output)

Dabei sind
$\underline{x}(t) \in \underline{X}$ (Zustandsraum) $\underline{x} : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^n$
$\underline{y}(t) \in \underline{Y}$ (Ausgangsraum / output) $\underline{y} : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^p$
$\underline{u}(t) \in \underline{U}$ (Eingangsraum / input) $\underline{u} : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^m$

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{U}$ sind Mengen von Funktionen, die auf $[t_0, \infty)$ def. sind

$\to$ für die Matrizen gilt
$\underline{\underline{A}}(t) : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{n,n}$
$\underline{\underline{B}}(t) : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{n,m}$
$\underline{\underline{C}}(t) : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{p,n}$
$\underline{\underline{D}}(t) : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}^{p,m}$

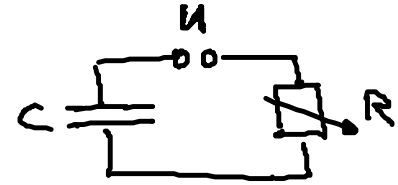
NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_k \underline{x}_k + \underline{\underline{B}}_k \underline{u}_k$$

Frage: Zus.hang Ausgang $\underline{y}$ und Eingang $\underline{u}$?

$\longrightarrow$ <u>Transferfunktion</u>

<u>Beispiel</u>: elektrischer Schaltkreis



c Kapazität
R Widerstand

Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung am Kond.

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

$n = 1$
$p = 1$
$m = 1$

Zustandgl.: Kirchhoff-gesetz

$$(\mathrm{I}) \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} U(t)$$

Vergleich mit allg. gl. liefert: $\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R}$

$\underline{\underline{C}} = 1$, $\underline{\underline{D}} = 0$

Lösung der Zustandsgl.

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \underbrace{q(t_0)}_{\text{Anf.Bed.}} + \frac{1}{R}\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) U(s)\,ds$$

hier: Lösung der Zustandsgl. $\hat{=}$ Ausgangsfkt.

<u>Stabilität</u>: i) asymptot. stabil: Realteile der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ negativ

ii) (schwach) stabil: Realteil der Eig.werte von $\underline{\underline{A}}$ nicht positiv

Beisp.: 1 Schaltkreis: Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$: $-\frac{1}{RC} < 0$

$\Rightarrow$ asymptot. stabil

2 Parabolantenne:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \ddot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} u$$

$n = 2$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$ $\qquad m=1$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J}-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(-\lambda)\left(-\frac{r}{J}-\lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$\Rightarrow$ (schwach) stabil $\qquad \lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0$

Def.: geg. System $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,u$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ und Endzustand $\underline{x}_1$.

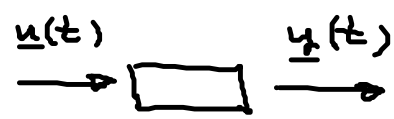
Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ <u>heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ steuerbar</u>, wenn es eine Steuerfkt. $\underline{u} \in \overline{\mathcal{U}}$ gibt, so dass die Lösung $\underline{x}(t)$ mit dieser Steuerung $\underline{x}_1 = x(t_1)$ erfüllt.

Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ <u>heißt nach $\underline{x}_1$ steuerbar</u>, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 $(t_0 < t_1 < \infty)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist.

Wenn für jedes $(t_0, \underline{x}_0)$ und jedes $\underline{x}_1$ das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar, so heißt das System <u>vollständig steuerbar</u>.

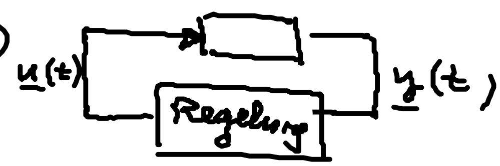
Steuerung vs. Regelung

- Offener Kreis (<u>Steuerung</u>)
  open loop control



$$\underline{u}(t) = \underline{h}(t, \underline{x}_0)$$

- geschlossener Kreis (<u>Regelung</u>)
  (Rückkopplung, feedback control, closed loop control)



z.B. Thermostat

$$\underline{u}(t) = -\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{y}(t)$$

oder $\underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$

<u>Satz</u>: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das zeitinvariante: $\underset{\in \mathbb{R}^n}{\underline{\dot{x}}(t)} = \underset{\in \mathbb{R}^{n,n}}{\underline{\underline{A}}}\, x(t) + \underset{\in \mathbb{R}^{n,m}}{\underline{\underline{B}}}\, \underset{\in \mathbb{R}^m}{u(t)}$

ist vollständig steuerbar

(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\underline{K}} := \Big(\underbrace{\underset{n\times m}{\underline{\underline{B}}},\ \underset{n\times m}{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}},\ \underline{\underline{A}}^2\,\underline{\underline{B}},\ \dots,\ \underline{\underline{A}}^{n-1}\,\underline{\underline{B}}}_{n\ \text{Stück}}\Big)$$

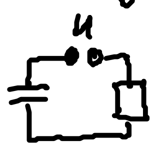
hat Rang n

(iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$,

so gilt $\underline{p}^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

(iv) $\text{Rang}\,(\lambda \underline{\mathbb{1}} - \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}) = n \quad \forall \lambda$

<u>Beisp.</u> 1



$\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}, \quad \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \qquad n = 1$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{B}}, \dots \underline{\underline{A}}^0 \underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{B}} = \frac{1}{R} \neq 0 \qquad \text{Rang}\,\underline{\underline{K}} = 1 = n$

$\Rightarrow$ Das System ist steuerbar

2 Parabolantenne: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} n = 2 & (x) \\ m = 1 & (u) \end{matrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{K}} = (\underline{\underline{B}}, \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}}_{\begin{pmatrix} K/J \\ -rK/J^2 \end{pmatrix}}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{J} \\ \frac{K}{J} & -\frac{rK}{J^2} \end{pmatrix} \qquad \det K = -\frac{K^2}{J^2} \neq 0$$

$\text{Rang}\,\underline{\underline{K}} = 2 \quad \Rightarrow$ Das System ist steuerbar

Beweis : (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Annahme $\underline{p} \neq 0$ Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$ und $\underline{p}^T \underline{\underline{B}} = 0$

Dann $\underline{p}^T \underline{\underline{K}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang}\, \underline{\underline{K}} \neq n$ ↯

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Annahme $\text{Rang}\, \underline{K} \neq n \qquad \underline{p}^T \underline{K} = 0 \qquad$ für $\underline{p} \neq 0$

dann $p^T \underline{\underline{A}}^i \underline{\underline{B}} = 0$ und somit für p Eigenvektor von A

$$p^T \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}} = \lambda \underline{p}^T \underline{\underline{B}} = 0$$ ↯