

2. Kontrollkonzepte

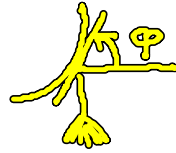
- klass. Kontrolltheorie
- Chaoskontrolle
- Quantenkontrolle

SFB 910 : Control of Self-Organizing Nonlinear Systems
Symposium 30.11.2012 15⁰⁰-17⁰⁰ #3005

2.1 Offene u. geschlossene Steuerung

Lit.: F. Tröltzsch : Optimal Control of Partial Diff. Eqs. (AMS 2000)
Skript V. Mehrmann : www3.math.tu-berlin.de/Verlesungen/
Jan Lunze : Regelungstechnik (Springer Lehrbuch 2008) SS11/Kontrolltheorie

Beispiel : Steuerung einer Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist



Beweg.gl. $\dot{\varphi} = \omega$

$$J \dot{\omega} = -r\omega + ku$$

Variablen : φ Drehwinkel
 ω Winkelgeschw.

Parameter : J Trägheitsmoment
 r Reibungskoeff.
 k Verstärkungsfaktor

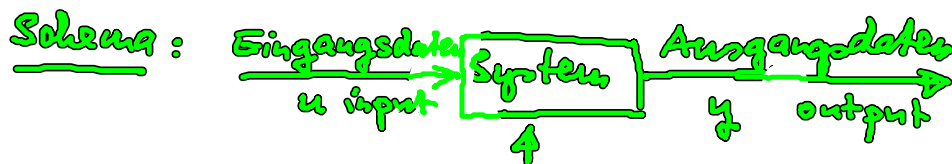
Steuervar.: u Spannung



Ziel : Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u
 \Rightarrow Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des Systems
 $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anfangswert $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ex.

\Rightarrow Kriterium : - zeitoptimale Lösung
- energieoptimale Lösung

• Theoret. / Mathemat. Grundlagen :



interne Dynamik : häufig unbekannt

Bsp.: Autofahren : Eingänge
- Gaspedal
- Bremsen
- Lenken

Ausgänge
 - Tacho
 - Drehzahlmesser
 interne Dynamik
 (Motor, Getriebe) unbekannt

Modell:
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \end{cases} \text{ mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

\underline{u} : Steuerfunktion (control var., input)
 \underline{x} : Systemzustand (dynam. var.)
 \underline{y} : messbare Ausgangsgrößen (output)

\underline{f} : funktionale Zus.hang des Systems
 \underline{g} : " " " " der Messung } evtl. schwierig zu ermitteln, interdisziplin. Zusammenarbeit

Def.: Ein lineares Steuerproblem hat die Form

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, \infty)$$

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$
Ausgangsgr. (output)

gabe: sind $\underline{x}(t) \in \underline{X}$ (Zustandsraum) $\underline{x}: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\underline{y}(t) \in \underline{Y}$ (Ausgangsraum) $\underline{y}: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$
output
 $\underline{u}(t) \in \underline{U}$ (Eingangsraum) $\underline{u}: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$
input

$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{U}$ sind Mengen von Funktionen, die auf $[t_0, \infty)$ def. sind

→ für die Matrizen gilt

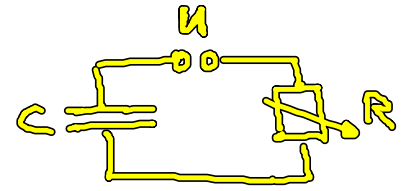
$$\begin{aligned} \underline{A}(t) &: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n} \\ \underline{B}(t) &: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n,m} \\ \underline{C}(t) &: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,n} \\ \underline{D}(t) &: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{p,m} \end{aligned}$$

NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_k \underline{x}_k + \underline{B}_k \underline{u}_k$$

Frage: Zusammenhang Ausgang y und Eingang u ?
 → Transferfunktion

Beispiel: elektrischer Schaltkreis



Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung am Kond.

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

C Kapazität
 R Widerstand

Zustandsgl.: Kirchhoff-Gesetz

$$(I) \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} U(t)$$

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ p &= 1 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Vergleich mit allg. gl. liefert: $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{B} = \frac{1}{R}$

$$\underline{C} = 1, \quad \underline{D} = 0$$

Lösung der Zustandsgl.

$$(I) \Rightarrow q(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right)}_{\text{Anf. bed.}} q(t_0) + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) U(s) ds$$

hier: Lösung der Zustandsgl. $\hat{=}$ Ausgangsgl.

Stabilität: i) asymptot. stabil: Realteile der Eigenwerte von \underline{A} negativ

ii) (schwach) stabil: Realteil der Eig.werte von \underline{A} nicht positiv

Beisp.: ① Schaltkreis: Eigenwert von \underline{A} : $-\frac{1}{RC} < 0$
 ⇒ asymptot. stabil

② Parabolantenne:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{I} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{I} \end{pmatrix} u$$

$n=2$

Eigenwerte von \underline{A} : $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ $n=1$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{r}{q} - \lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$(-\lambda)(-\frac{r}{q} - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{(schwach) stabil} \quad \lambda_2 = -\frac{r}{q} < 0$$

Def.: Gez. System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}u$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

und Endzustand \underline{x}_1 .

Das Paar (t_0, \underline{x}_0) heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$

steuerbar, wenn es eine Steuerfkt. $u \in \underline{U}$ gibt,

so dass die Lösung $\underline{x}(t)$ mit dieser Steuerung

$\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ erfüllt.

Das Paar (t_0, \underline{x}_0) heißt nach \underline{x}_1 steuerbar, wenn

es zu irgendeiner Zeit t_1 ($t_0 < t_1 < \infty$) nach \underline{x}_1

steuerbar ist.

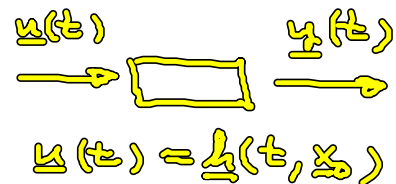
Wenn für jedes (t_0, \underline{x}_0) und jedes \underline{x}_1 das Paar (t_0, \underline{x}_0)

nach \underline{x}_1 steuerbar, so heißt das System

vollständig steuerbar.

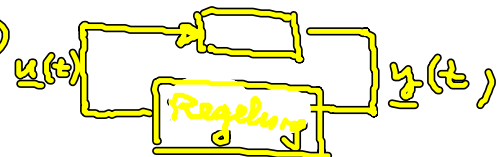
Steuerung vs. Regelung

- Offener Kreis (Steuerung)
open loop control



- geschlossener Kreis (Regelung)

(Rückkopplung,
feedback control,
closed loop control)



z.B. Thermostat

$$u(t) = -\underline{F}(t) y(t)$$

$$\text{oder } \underline{u}(t) = \underline{h}(\underline{x}(t))$$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das zeitinvariante: $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}u(t)$
 $\mathbb{R}^n \quad \mathbb{R}^{n \times n} \quad \mathbb{R}^{n \times m} \quad \mathbb{R}^m$
 ist vollständig steuerbar

(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{K} := \left(\begin{array}{c} \underline{B} \\ \underline{A}\underline{B} \\ \underline{A}^2\underline{B} \\ \dots \\ \underline{A}^{n-1}\underline{B} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ Stück}}$

hat Rang n

(iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu \underline{A}^T ,
 so gilt $\underline{p}^T \underline{B} \neq 0$

(iv) $\text{Rang}(\lambda \underline{1} - \underline{A}\underline{B}) = n \quad \forall \lambda$

Beisp. ①  $\underline{A} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{B} = \frac{1}{R}$ $n=1$

$\Rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \dots, \underline{A}^0 \underline{B}) = \underline{B} = \frac{1}{R} \neq 0 \quad \text{Rang } \underline{K} = 1 = n$

\Rightarrow Das System ist steuerbar

② Parallelantenne: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{pmatrix}$ $n=2$ (x)
 $m=1$ (u)

$\Rightarrow \underline{K} = (\underline{B}, \underline{A}\underline{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{T} \\ \frac{K}{T} & -\frac{K}{T^2} \end{pmatrix}$ $\det \underline{K} = -\frac{K^2}{T^2} \neq 0$

$\text{Rang } \underline{K} = 2 \Rightarrow$ Das System ist steuerbar

Beweis : (ii) \Rightarrow (iii)

Annahme $\underline{p} \neq 0$ Eigenvektor zu \underline{A}^T und $\underline{p}^T \underline{B} = 0$

Dann $\underline{p}^T \underline{K} = 0 \Rightarrow \text{Rang } \underline{K} \neq n \quad \checkmark$

(iii) \Rightarrow (ii)

Annahme $\text{Rang } \underline{K} \neq n \quad \underline{p}^T \underline{K} = 0 \quad \text{für } \underline{p} \neq 0$

dann $\underline{p}^T \underline{A} \underline{B} = 0$

und somit für \underline{p} Eigenvektor
von \underline{A}

$\underline{p}^T \underline{A} \underline{B} = \lambda \underline{p}^T \underline{B} = 0 \quad \checkmark$