

## 2.2 Chaostkontrolle

Handbook of Chaos Control (Eds. E. Schöll, H.G. Schuster)  
Wiley, 2008

## Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbed.
- lokale Instabilität (pos. Lyapunov-Exponenten)  
bei globaler Beschränktheit (seltsame Attraktoren)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instab. sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension = 3 (Überschneidung von Trajektorien)  
in 2D-Systemen

→ wiederkehrende Trajektorien:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon > 0: \forall t \geq 0 \exists T(t, \varepsilon) \text{ mit } 0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon :$$

$$|x(t + T(t, \varepsilon)) - x(t)| < \varepsilon$$

lokale instabile Trajektorien kommen sich selbst auf lange Zeiten beliebig nah

⇒ Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung  $\implies$  große Wirkung  
(Kontrolleingriff) (Veränderung der Stabilität)

(ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe eines Zielzustandes zu landen und diesen mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

### 2.2.1 OGY-Kontrolle

Edward Ott } damals  
Celso Grebogi } University of Maryland  
James Yorke }

"Controlling Chaos", Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990)

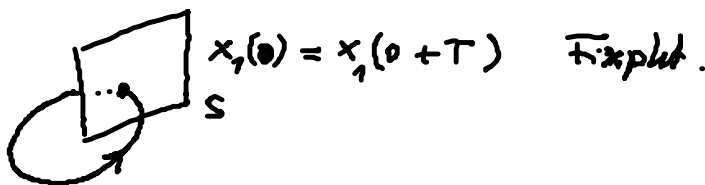
Idee: (i) Überführung von  $\dot{x} = f(x, u)$  in eine diskrete Abb. mittels Poincaré-Schnitten

(ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustands ist.

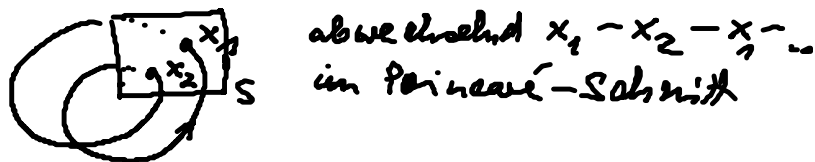
Poincaré-Schnitt: Definiere  $S = \{ \underline{x} : s(\underline{x}) = 0 \}$  Fläche  
 gl. der Fläche

mit  $\underline{x}_i(0) \in S$

Beispiel: Periode 1-Orbit



Periode 2-Orbit



Poincaré-Abbildung:  $\underline{x} \rightarrow \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$   
 (return map)

1. Wiederkehrpunkt  
 auf Fläche  $S$  (Durch-  
 stoßpunkt)

$\Rightarrow$  Folge von Punkten  $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$  mit  $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$   
 und  $t_k$  Zeitpunkt des  $k$ -ten Durchstoßens von  $S$   
 und  $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$  konstant für  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

Dann kann man die Dgl.  $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$  durch eine diskrete  
 iterierte Abb. ersetzen:

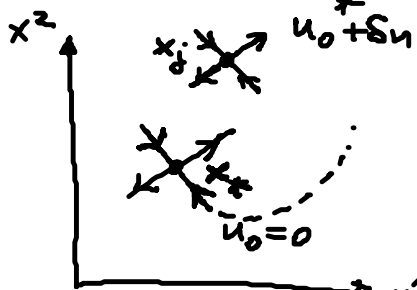
$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underline{P}(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u}_k) \quad \text{mit} \quad \tilde{\underline{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}_*$$

Abweich. v.  $\uparrow$   
 Zieldurchstoßpunkt

OGY-Kontrolle mittels:

$$\underline{u}_k = \begin{cases} C \tilde{\underline{x}}_k, & \text{wenn } |\tilde{\underline{x}}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der  
 Nähe von  $\underline{x}_*$  ist:



Idee: Fixpt. auf  $S$  so verschieben,  
 dass nächstes  $x_{j+1}$  auf  
 stab. Mannigf. von  $x_*$  landet

$x_*$  Sattelpkt in  $S \cong$  instab. periodischer Orbit im ursprüngl. Syst.

Ziel: Stabilisiere  $x_*$

$\rightarrow$  Stabilisierung eines UPD  
 (unstable periodic orbit)

Kontrolle möglich, wenn es ein  $\delta_N$  zu jedem  $\underline{x}_j$  in der Nähe v.  $x_*$   
 gibt.

# Linearisierung des Systems in der Nähe des Zielpunktes

$$\tilde{x}_{k+1} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\underline{x}^*} \tilde{x}_k + \left. \frac{\partial P}{\partial u} \right|_{u_0} (u - u_0) \quad (u \text{ skalar})$$

Verbindung von  $u$  mit Systemzustand  $\underline{x}_k$ ?

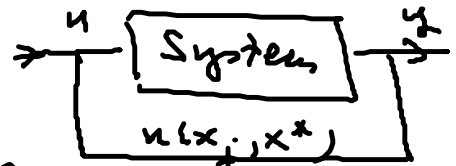
Ansatz:  $u_k = \begin{cases} u_0 - \underline{c} \tilde{x}_k & \text{wenn } |\tilde{x}_k| \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  Kontrollkraft zeigt in Richtung Ziel

Fixpunkt stabil, wenn die Beträge der Eigenwerte der Jacobimatrix der Abb.  $< 1$  sind

$$\underline{A}^M = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_1}{\partial x^2} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_2}{\partial x^2} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_2 \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x^* \\ u_0}}$$

$\Rightarrow$  Bed. für Eigenwerte  $|\lambda| < 1$  liefert

Beziehung  $c_1(x^*, u_0)$   
 $c_2(x^*, u_0)$

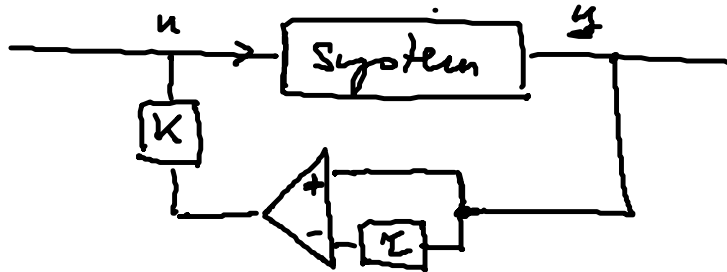


$$\underline{c} \tilde{x}_k =: c_1 (x_j^1 - x_*^1) + c_2 (x_j^2 - x_*^2)$$

- Nachteile:
- evtl. Wartezeiten
  - Kenntnis des Zielzustandes  $x^*$  nötig
  - Poincaré-Schnitt in Realität schwer zu bestimmen
  - rechenintensiv

## 2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas:  
 "Continuous control of chaos  
 by self-controlling feedback"  
 Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

"time-delayed feedback" (TDF) oder Pyragas-Kontrolle

Idee: Verwendung statt  $\underline{x}^*$  eine zeitverzögerte Version des Ausgangs  $y(t-\tau)$

Pyragas-Kontrolle:  $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \underline{K} (y(t) - y(t-\tau))$

Vorteil: — keine Kenntnis des Zielzustandes nötig  
 — nichtinvariant: Kontrollkraft verschwindet, wenn Zielzustand erreicht ist

Beispiel: (i) Stabilisierung eines instab. period. Orbits der Periode  $T$ :  
 wähle  $\tau = T$ , bei erfolgreicher Stabilisierung:  
 $x(t) = x(t-\tau) \Rightarrow y = 0$

(ii) Stabilisierung von Fixpunkt.

z.B. Rössler-System (chaot.-System)

$$\dot{x} = -y - z - K(x(t) - x(t-\tau))$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - p)$$

Nichtlin.

chaotisch für z.B.  $a=0.2$ ,  $b=0.2$ ,  $p=6.5$

Periode 1-Orbit mit  $T_1 = 5.91679$

" 2-Orbit mit  $T_2 = 11.82814$

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvariant) für  $0.24 < K < 2.3$

Balanov, Janson, Schöll, Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)

