2.2 Chaoskontrolle

Handbook of Chaos Control (Eds. E. Schöll, H. G. Schuster)
Wiley, 2008

Kriterien für Chaos:

- sensitive Abhängigkeit gegenüber Anfangsbed.
- lokale Instabilität (pos. Lyapunov-Exponenten) bei globaler Beschränktheit (seltsame Attraktoren)
- Nichtlinearitäten (lineare Systeme mit lokaler Instab. sind nicht begrenzt)
- minimale Dimension $= 3$ (Überschneidung von Trajektorien in 2D-Systemen)
- wiederkehrende Trajektorien:

  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists T_\varepsilon > 0 : \forall t \geq 0 \; \exists T(t,\varepsilon)$ mit $0 < T(t,\varepsilon) < T_\varepsilon$:

  $|\underline{x}(t + T(t,\varepsilon)) - x(t)| < \varepsilon$

  lokale instabile Trajektorien kommen sich selbst auf lange Zeiten beliebig nah

$\Rightarrow$ Ansatz für Kontrollmethoden in chaotischen Systemen:

(i) kleine Änderung (Kontrolleingriff) $\Longrightarrow$ große Wirkung (Veränderung der Stabilität)

(ii) Wenn die Trajektorie jedem Punkt des Attraktors beliebig nah kommt, braucht man nur Geduld, um automatisch in der Nähe eines Zielzustandes zu landen und diesen mit kleinen Kontrolleingriffen zu erreichen.

2.2.1 OGY-Kontrolle

Edward Ott
Celso Grebogi
James Yorke

} damals University of Maryland

„Controlling Chaos", Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990)

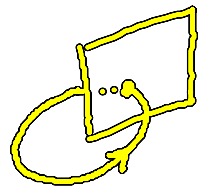
Idee: (i) Überführung von $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ in eine diskrete Abb. mittels Poincaré-Schnitten

(ii) Kontrolle wirkt nur dann, wenn die Trajektorie in der Nähe des Zielzustands ist.

Poincaré-Schnitt: Definiere $S = \{\underline{x} : s(\underline{x}) = 0\}$ Fläche
gl. der Fläche

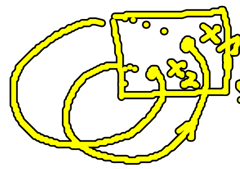
mit $\underline{x}_i(0) \in S$

Beispiel: Periode 1-Orbit



$x_1(0) = x_1(0+T)$ Fixpkt.

Periode 2-Orbit



abwechselnd $x_1 - x_2 - x_1 - \dots$ im Poincaré-Schnitt

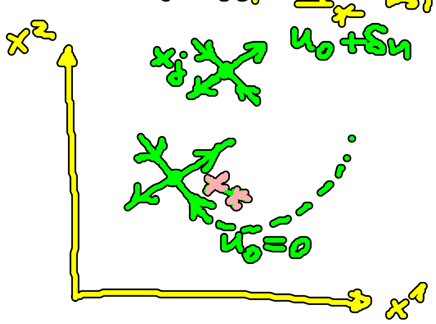
Poincaré-Abbildung (return map): $\underline{x} \to \underline{P}(\underline{x}, \underline{u})$ 1. Wiederkehrpunkt auf Fläche S (Durchstoßpunkt)

$\Rightarrow$ Folge von Punkten $\underline{x}_{k+1} = \underline{P}(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k)$
und t_k Zeitpkt. des k-ten Durchstoßens von S
und $\underline{u}_k = \underline{u}(t)$ konstant für $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Dann kann man die Dgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ durch eine diskrete iterierte Abb. ersetzen: $\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underline{P}(\tilde{\underline{x}}_k, \underline{u}_k)$ mit $\tilde{\underline{x}}_k = \underline{x}_k - \underline{x}_*$
Abweich. v. Zieldurchstoßpkt.

OGY-Kontrolle mittels:
$$\underline{u}_k = \begin{cases} C\tilde{\underline{x}}_k, & \text{wenn } |\tilde{\underline{x}}_k| \le \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein Kontrollsignal wird generiert, wenn die Trajektorie in der Nähe von $\underline{x}_*$ ist:



(Poincaré-Ebene S)

Idee: Fixpkt. auf S so verschieben, dass nächstes x_{j+1} auf stab. Mannigf. von x_* landet.

x_* Sattelpkt in S $\triangleq$ instab. periodischer Orbit im ursprüngl. Syst.

Ziel: Stabilisiere x_* $\longrightarrow$ Stabilisierung eines UPO (unstable periodic orbit)

Kontrolle möglich, wenn es ein δu zu jedem $\underline{x}_j$ in der Nähe v. x_* gibt.

Linearisierung des Systems in der Nähe des Zielpktes

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{x}}\Big|_{\underline{x}^*} \tilde{\underline{x}}_k + \frac{\partial \underline{P}}{\partial u}\Big|_{u_0} (u - u_0) \qquad (u \text{ skalar})$$

Verbindung von u mit Systemzustand $\underline{x}_k$?

Ansatz :
$$u_k = \begin{cases} u_0 - \underline{c}\,\tilde{\underline{x}}_k & \text{wenn } |\tilde{x}_k| \le \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

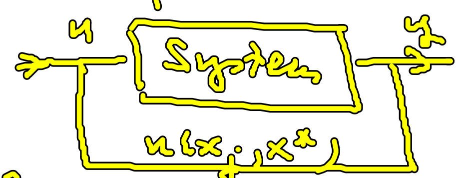
Kontrollkraft zeigt in Richtung Ziel

Fixpkt stabil, wenn die Beträge der Eigenwerte der Jacobimatrix der Abb. < 1 sind

$$\underline{\underline{A}}^M = \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} - \frac{\partial P_1}{\partial u} c_2 \\ \frac{\partial P_2}{\partial x^1} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_1 & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial u} c_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x^* \\ u_0}}$$

$\Longrightarrow$ Bed. für Eigenwerte $|\lambda| < 1$ liefert

Beziehung $c_1(\underline{x}^*, u_0)$
$c_2(x^*, u_0)$

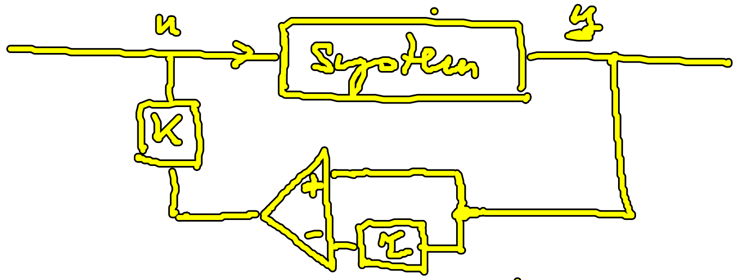


$$\underline{c}\,\tilde{x}_k =: c_1 (x_j^1 - x_*^1) + c_2 (x_j^2 - x_*^2)$$

Nachteile :
- evtl. Wartezeiten
- Kenntnis des Zielzustandes x^* nötig
- Poincaré-Schnitt in Realität schwer zu bestimmen
- rechenintensiv

2.2.2 Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Schema:



K. Pyragas: "Continuous control of chaos by self-controlling feedback" Phys. Lett. A 170, 421 (1992)

„time-delayed feedback" (TDF) oder Pyragas-Kontrolle

Idee: Verwende statt $\underline{x}^*$ eine zeitverzögerte Version des Ausgangs $y(t-\tau)$

Pyragas-Kontrolle: $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) + \underline{\underline{K}}\left(\underline{y}(t) - \underline{y}(t-\tau)\right)$

Vorteil: – keine Kenntnis des Zielzustandes nötig
– nichtinvasiv: Kontrollkraft verschwindet, wenn Zielzustand erreicht ist

Beispiel: (i) Stabilisierung eines instab. period. Orbits der Periode T:
wähle $\tau = T$, bei erfolgreicher Stabilisierung
$x(t) = x(t-\tau) \Longrightarrow \underline{y} = 0$

(ii) Stabilisierung von Fixpkt.

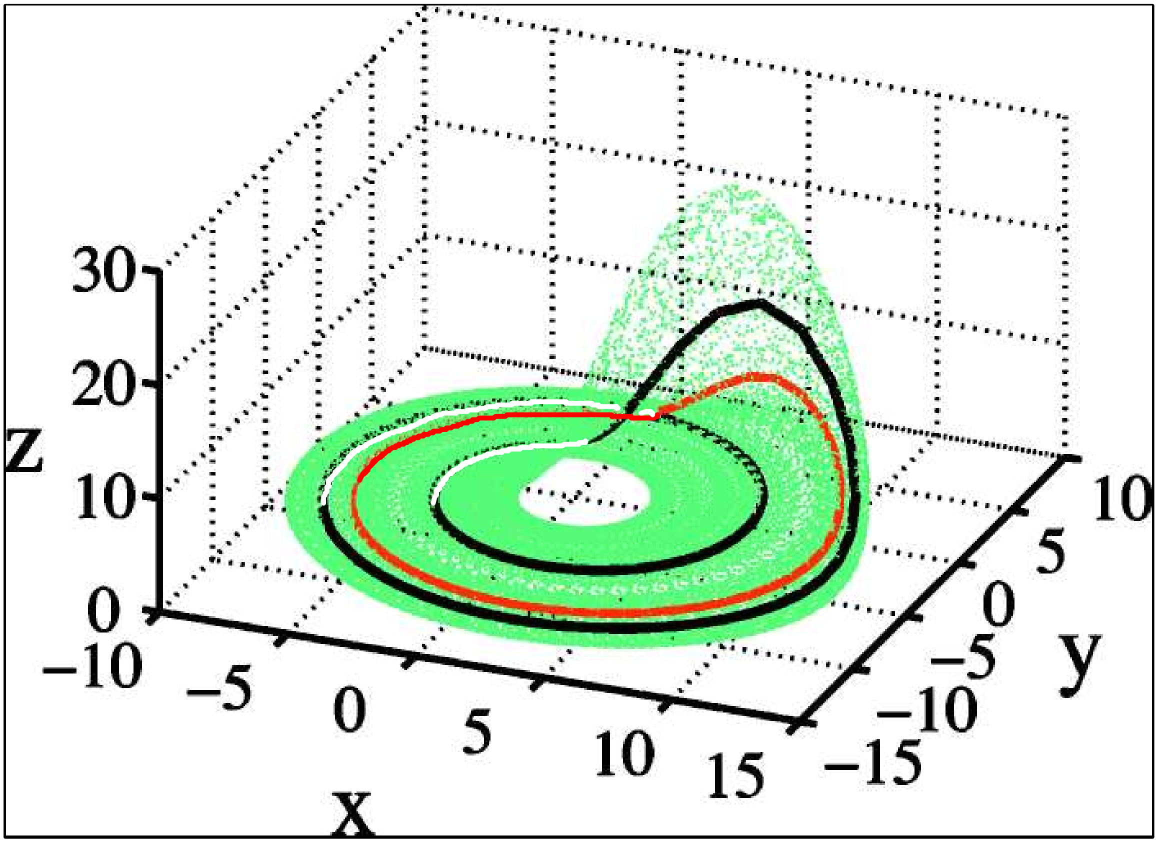
z.B. Rössler-System (chaot. System)

$$\dot{x} = -y - z - K\left(x(t) - x(t-\tau)\right)$$
$$\dot{y} = x + ay$$
$$\dot{z} = b + \underbrace{z(x}_{\text{Nichtlin.}} - \mu)$$

chaotisch für z.B. $a = 0.2$, $b =$, $\mu = 6.5$
Periode 1-Orbit mit $T_1 = 5.91679$
" 2-Orbit mit $T_2 = 11.82814$

Periode 1-Orbit stabilisiert (nichtinvasiv) für $0.24 < K < 2.3$

Balanov, Janson, Schöll, Phys. Rev. E 71, 016222 (2005)



30
20
z
10
0
−10
−5
0
5
10
15
x
10
5
0
−5
y
−10
−15