2.5 Optimale Kontrolle

Betrachten $\qquad \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t) \qquad t \in [t_0, t_f]$ $\qquad$ (1)

$\underline{x}(t_0) = \underline{x_0}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ Kontrollfunktion

Kostenfunktional

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t)\, dt \qquad (2)$$

ϕ – Beschreibt Abweichungen vom gewünschten Endzustand

$\underline{F}$ – Weist den Zustands-, Ausgangs- und Eingangsgrößen Kosten zu

Kontrollproblem: Finde $\underline{u}^*(t) \in \underline{\bar{U}}$, so dass J minimal wird, wobei $\underline{\bar{U}}$ der Raum der möglichen Kontrollfunktionen ist.

- - - - - - - - - - - -

Beispiel Parabolantenne

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -T/J \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ K/J \end{pmatrix} \underline{u}$$

$\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{R}}$ positiv definit

Kostenfunktional

$$J[\underline{x},\underline{u}] = \underbrace{\underline{x}(t_f)^T \underline{\underline{M}}\, \underline{x}(t_f)}_{(1)} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\underline{x}(t)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)}_{(2)} + \underbrace{\underline{u}(t)\, \underline{R}\, \underline{u}(t)}_{(3)}\, dt$$

(1) Abweichung des Endzustandes $\underline{x}(t_f)$ vom Zielzustand

Ziel: $x(t_f) = 0$

(2) Einschwingverhalten („Summe der Abweichungen")

(3) gemitteltes Amplitudenquadrat der Eingangsspannung.

- - - - - - - - - - - - - - - -

<u>Übersetzung von (1) und (2) in ein Minimierungsproblem ohne Beschränkung</u>:

$$\int_{t_0}^{t_f} \underline{\lambda}(t) \left\{ f(\underline{x},\underline{u},t) - \dot{\underline{x}} \right\} dt = 0 \qquad \text{wegen } (1)$$

$\underline{\lambda}$: Kozustandsfunktion (hier erstmal beliebige Funktion)

$\underline{\lambda}(t): [t_0, t_f] \to \mathbb{R}^2$

Minimieren von (2) unter der Nebenbedingung (1) ist äquivalent zum Minimieren von:

$$J[\underline{x},\underline{u}] = \phi(\underline{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left[F(\underline{x},\underline{u},t) + \lambda(t) \left\{ f(\underline{x},\underline{u},t) - \dot{\underline{x}} \right\} \right] dt$$

Definieren Hamilton-Funktion:

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = F(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}(t) \cdot \underline{f}(x, u, t)$$

$$\Rightarrow \quad J = \phi(\underline{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{ H - \underline{\lambda}(t) \dot{\underline{x}} \} \, dt$$

Pontryagin'sches Maximumsprinzip

Sei $\underline{u}_* \in \overline{U}$ und $\underline{x}_*(t) := \underline{x}(t, \underline{u}_*)$ die zugehörige Lösungstrajektorie von (1). Ist $\underline{u}_*$ optimal für (2), so erfüllt u_* die notwendigen Optimalsbedingungen:

(i) $H(\underline{x}_*, \underline{u}_* \underline{\lambda}) = \inf_{\underline{u} \in \overline{U}} H$ für alle $t \in [t_0, t_f]$

$$\left(\text{also } \underbrace{\frac{\partial H}{\partial u} \bigg|_*}_{|_* = |_{\substack{u = u_* \\ x = x_*}}} = 0 \right)$$

(ii) Die Kozustandsfunktion erfüllt die folgende Gleichung

$$\dot{\underline{\lambda}} = - \nabla H$$

(iii) $\underline{\lambda}(t_f) = \nabla_x \phi(\underline{x}_*(t_f))$

Rezept zum Finden von u^* und x^*

1. aus (i) $u^* = U_*(x_*, \lambda, t)$
2. aus (ii) DGL für $\dot{\lambda}(t)$
3. System aus gekoppelten DGLs ($\dot{\lambda} = \ldots, \dot{x} = \ldots$) lösen
4. aus (iii) und $x(t_0) = x_0$ Integrationskonstanten bestimmen

---

Warum minimieren (i), (ii), (iii) J? (hier 1D)

Betrachten kleine Abweichungen von u^* und x^*

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\, \eta(t)$$
$$x(t) = x^*(t) + \varepsilon\, \xi(t)$$

ε klein

mit $\eta(t_0) = \xi(t_0) = 0$

($\eta(t_f), \xi(t_f)$ sind nicht bestimmt)

Minimum von J unter solchen Variationen $\iff \delta J = 0$

$$\frac{\delta J}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J\,[x^* + \varepsilon\,\xi,\ u^* + \varepsilon\,\eta]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{dx}\phi(x^*(t_f))\,\xi(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_* \xi + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta - \underbrace{\lambda \dot{\xi}}_{\text{partielle Integration}} \Big\}\, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda \dot{\xi}\, dt = \underbrace{[\lambda \xi]_{t_0}^{t_f}}_{\lambda(t_f)\xi(t_f) - \underbrace{\lambda(t_0)\cdot\xi(t_0)}_{0}} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}\, \xi\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\delta J}{d\varepsilon} = \Big\{ \frac{d\phi}{dx}(x^*(t_f)) - \lambda(t_f) \Big\}\, \xi(t_f)$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f} \Big(\Big\{ \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \Big\}\Big|_* \xi + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta \Big)\, dt$$

Wählen $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_*$ (Bedingung (ii))

und $\lambda(t_f) = \frac{d\phi}{dx}(x^*(t_f))$ (Bedingung (iii))

$$\Rightarrow \frac{\delta J}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta\, dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da $\eta(t)$ beliebig, muss $\left.\frac{dH}{du}\right|_{*} = 0$ sein.

$\Rightarrow$ Die Bedingungen (i), (ii), (iii) lassen die Variation von J verschwinden.