2.5 Optimale Kontrolle

Betrachten $\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}, t)$ $\quad t \in [t_0, t_f]$ (1)

$\underline{x}(t_0) = \underline{x_0}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ Kontrollfunktion

Kostenfunktional

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \phi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(\underline{x}, \underline{u}, t)\, dt \qquad (2)$$

ϕ – Beschreibt Abweichungen vom gewünschten Endzustand

$\underline{F}$ – Weist den Zustands-, Ausgangs- und Eingangsgrößen Kosten zu

Kontrollproblem: Finde $\underline{u}^*(t) \in \underline{U}$, so dass J minimal wird, wobei $\underline{U}$ der Raum der möglichen Kontrollfunktionen ist.

Beispiel Parabolantenne

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sigma/\gamma \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ K/\gamma \end{pmatrix} \underline{u}$$

$\underline{M}, \underline{R}$ positiv definit

Kostenfunktional

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \underbrace{\underline{x}(t_f)^T \underline{M}\, \underline{x}(t_f)}_{1} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\underline{x}(t)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t)}_{2} + \underbrace{\underline{u}(t)\, \underline{R}\, \underline{u}(t)}_{3}\, dt$$

1 Abweichung des Endzustandes $\underline{x}(t_f)$ vom Zielzustand

Ziel: $x(t_f) = 0$

2 Einschwingverhalten („Summe der Abweichungen")

3 gemitteltes Amplitudenquadrat der Eingangsspannung.

Übersetzung von 1 und 2 in ein Minimierungsproblem ohne Beschränkung:

$$\int_{t_0}^{t_f} \underline{\lambda}(t) \left\{ f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}} \right\} dt = 0 \qquad \text{wegen } 1$$

$\uparrow$ Kozustandsfunktion (hier erstmal beliebige Funktion)

$\underline{\lambda}(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Minimieren von 0 unter der Nebenbedingung 1 ist äquivalent zum minimum von:

$$J[\underline{x}, \underline{u}] = \Phi(\underline{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \left[F(\underline{x}, \underline{u}, t) + \lambda(t) \left\{ f(\underline{x}, \underline{u}, t) - \dot{\underline{x}} \right\} \right] dt$$

Definieren Hamilton-Funktion:

$$H(\underline{x}, \underline{u}, \underline{\lambda}, t) = F(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{\lambda}(t) \cdot \underline{f}(x, u, t)$$

$$\Rightarrow \quad J = \phi(\underline{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{ H - \underline{\lambda}(t) \dot{\underline{x}} \} \, dt$$

Pontryagin'sches Maximumsprinzip

Sei $\underline{u}_* \in \underline{U}$ und $\underline{x}_*(t) := \underline{x}(t, \underline{u}_*)$ die zugehörige Lösungstrajektorie von (1). Ist $\underline{u}_*$ optimal für (2), so erfüllt u_* die notwendigen Optimalsbedingungen:

(i) $H(\underline{x}_*, \underline{u}_*, \underline{\lambda}) = \inf_{\underline{u} \in \underline{U}} H$ für alle $t \in [t_0, t_f]$

$$\left(\text{also } \frac{\partial H}{\partial u}\bigg|_* = 0 \right)$$

$$|_* = |_{\substack{u = u_* \\ x = x_*}}$$

(ii) Die Kozustandsfunktion erfüllt die folgende Gleichung

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\nabla H$$

(iii) $\underline{\lambda}(t_f) = \nabla_x \phi(\underline{x}_*(t_f))$

Rezept zum Finden von u^* und x^*

1. aus (i) $u^* = U_*(x_*, \lambda, t)$
2. aus (ii) DGL für $\dot{\lambda}(t)$
3. System aus gekoppelten DGLs $(\dot{\lambda} = \dots, \dot{x} = \dots)$ lösen
4. aus (iii) und $x(t_0) = x_0$ Integrationskonstanten bestimmen

---

Warum minimieren (i), (ii), (iii) J? (wie 1D)

Betrachten kleine Abweichungen von u^* und x^*

$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\,\eta(t)$ ε klein

$x(t) = x^*(t) + \varepsilon\,\xi(t)$ mit $\eta(t_0) = \xi(t_0) = 0$

($\eta(t_f)$, $\xi(t_f)$ sind nicht bestimmt)

Minimum von J unter solchen Variationen $\Longleftrightarrow$ $\delta J = 0$

$$\frac{\delta J}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} J\left[x^* + \varepsilon\xi,\ u^* + \varepsilon\eta\right]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \frac{d}{dx}\phi(x^*(t_f))\,\xi(t_f) + \int_{t_0}^{t_f}\left\{ \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_* \xi + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta - \underbrace{\lambda\dot{\xi}}_{\text{partielle Integration}} \right\} dt$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda\dot{\xi}\, dt = \underbrace{\left[\lambda\xi\right]_{t_0}^{t_f}}_{\lambda(t_f)\xi(t_f) - \underbrace{\lambda(t_0)\cdot\xi(t_0)}_{0}} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}\,\xi\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\delta J}{d\varepsilon} = \left\{ \frac{d\phi}{dx}(x^*(t_f)) - \lambda(t_f) \right\}\xi(t_f)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left(\left\{ \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right\}\Big|_* \xi + \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta \right) dt$$

Wählen $\quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_* \quad$ (Bedingung (ii))

und $\quad \lambda(t_f) = \frac{d\phi}{dx}(x^*(t_f)) \quad$ (Bedingung (iii))

$$\Rightarrow \frac{\delta J}{d\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u}\Big|_* \eta\, dt \overset{!}{=} 0$$

Da $\eta(G)$ beliebig, muss $\left.\frac{dH}{du}\right|_*=0$ sein.

$\Rightarrow$ Die Bedingungen (i), (ii), (iii) lassen die Variation von J verschwinden.