3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren

3.1 Retardierte komplexe Systeme

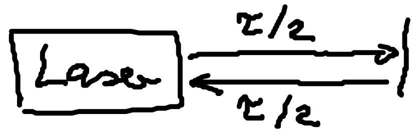
Delay-Differenzialgln.: $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$

Verzögerungszeit τ

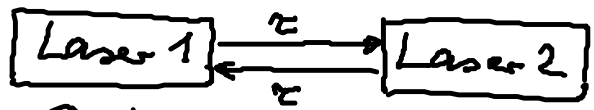
Delay (Retardierung) ist weitverbreitet in nichtlin. Systemen

- mechan. Systemen: Balancieren, Segway

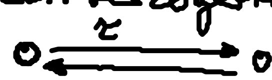
- elektr. Stromkreis: Signalverarbeitungszeiten (Latenzzeiten)
  kapazitive Effekte
- optische Systeme: Signallaufzeiten (Lichtgeschw.)
  - Laser mit opt. Rückkoppl.



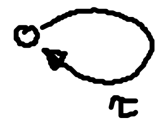
  - 2 gekoppelte Laser



- biolog. Systeme: Zell-Zyklus-Zeit τ
  biolog. Uhren
- neuronale Netzwerke: zeitverzögerte Kopplung



  zeitverzögerte Rückkopplung



  z.B. biochem. Prozesse
  (Neurotransmitter)
  neuro-vaskuläre Kopplung

Retardierung generiert reichhaltiges komplexes Verhalten

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODE (ordinary diff. eq.) auf unendlich.
  Anfangsbed. auf ganzem Intervall $[-\tau, 0]$ notwendig:
  history function $x(t)$ auf $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
  - delay-induzierte Bifurkation, Instabilität
  - delay-induzierte Multistabilität

– Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
– Chaoskontrolle (Unterdrückung von Chaos)

Lit.: T. Erneux: Applied delay differential eqs. (Springer 2009)
P. Hövel: Control of Complex Nonlin. Systems with Delay (Springer 2010)
V. Flunkert: Delay-Coupled Complex Systems (Springer 2011)
Just, Pelster, Schanz, Schöll (eds.): Delayed complex systems (Theme Issue of Phil. Trans. Roy. Soc. A 368 (2010))
" " " (2013)

3.2 Lineare Stabilitätsanalyse retardierter Differenzialgln.

einfachste lin. Delay-Dgl. $\dot{x} = -a\,x(t) + b\,x(t-\tau)$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

Anf. bed. $x(t) = \phi(t)$ $\quad -\tau \leq t \leq 0$

Fixpkt. $x^* = 0$

kleine Störung: $x(t) \sim e^{\Lambda t}$

$$\Rightarrow \Lambda e^{\Lambda t} = -a e^{\Lambda t} + b e^{\Lambda t} e^{-\Lambda \tau}$$

$$\boxed{\Lambda = -a + b e^{-\Lambda \tau}}$$

transzendente char. Gl. für Eigenwert $\Lambda \in \mathbb{C}$

Lösung für Λ: $\underbrace{(\Lambda + a)\tau}_{z} = b\tau e^{-\Lambda\tau}$

$$z e^{z} = b\tau e^{a\tau}$$

inverse Fkt. von $z e^{z} = y$: $z = W_\ell(y)$ Lambert

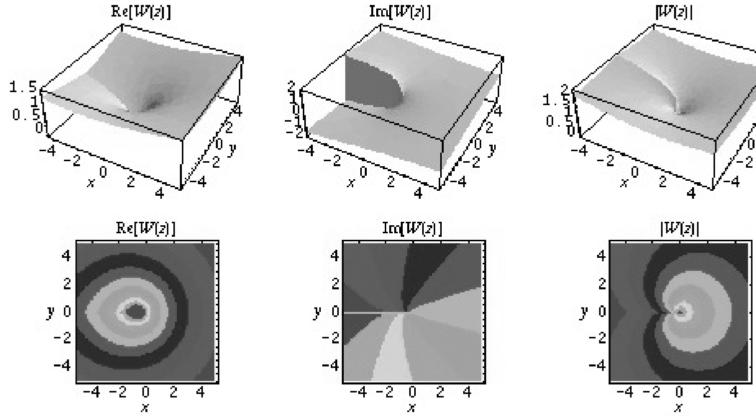
(vielblättrig, $\ell \in \mathbb{Z}$)

(cf. $e^{z} = y \Leftrightarrow z = \ln y$)

$$\Rightarrow \Lambda_\ell = -a + \frac{1}{\tau} W_\ell\left(b\tau e^{a\tau}\right)$$

($a > 0$: stab. Fixp. ohne Delay
$a < 0$: inst. " " ")

allg. Lös. $x(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_\ell e^{\Lambda_\ell t}$



Hauptzweig

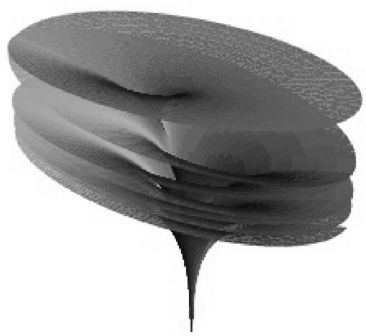
$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

$$\left(|z| < \frac{1}{e}\right)$$

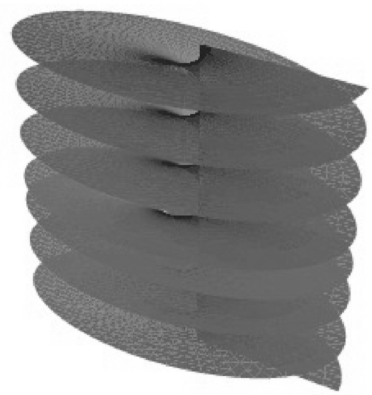
asymptot. Entwicklung für $z \to 0$ u. $z \to \infty$ $(l \neq 0)$

$$W_l(z) \approx \ln z + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)$$

Re W(z)



Im W(z)



$\tau \to 0$ $(z \to 0)$:

$$W_l(z) \approx \underbrace{\ln z}_{\to -\infty} + 2\pi i l + \text{höh. Ordn.}$$

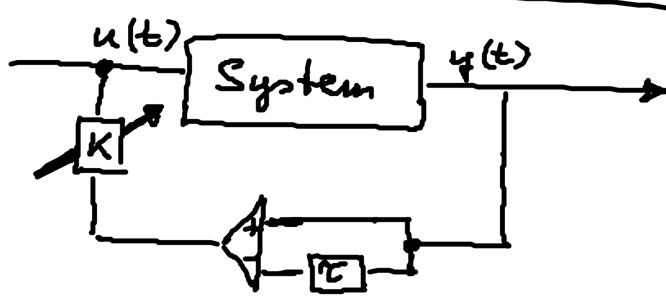
$$\boxed{\Lambda_l \to -\infty \quad \forall l \neq 0}$$

$\tau \to \infty$ $(z \to \infty)$: $\Lambda_l \approx \underline{-a} + \frac{1}{\tau}\left[\ln(b\tau) + \underline{a\tau} + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)\right]$

Lit. Amann, Schöll, Just: Physica A 373, 191 (2007)

3.2.1 Stabilisierung instabiler Fixpunkte durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Pyragas (1992)
Phys. Lett. A 170, 421



closed-loop control
(Rückkoppl. kontrolle)

$y(t)$: Ausgangsvar.

$u(t) = K[y(t) - y(t-\tau)]$
Kontrollvar.

Verzög.zeit τ
Rückkoppl.stärke K

• <u>nichtinvasiv</u>

(Kontrollkraft verschwindet auf dem Zielzustand $y(t) = y(t-\tau)$)

<u>Allg. Form eines 2-Var.-Systems</u> (ohne Kontrolle)

Fixpkt. $\underline{x}^*$: $\quad 0 \overset{!}{=} \underline{\dot{x}} = f(\underline{x}^*) \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Linearisierung um $\underline{x}^*$ für kleine Störungen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^* + \delta\underline{x}(t) : \qquad \delta\underline{\dot{x}} = (Df)_* \, \delta\underline{x}$$

Jacobi-Matrix $(Df)_* \equiv A$

Lös. $\delta\underline{x} \sim e^{\Lambda t}$: $\quad 0 = \det(A - \Lambda \mathbb{1}) = \Lambda^2 - \Lambda \operatorname{tr} A + \det A$

$$\Rightarrow \quad \Lambda = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Normalform eines instab. Fokus $\quad \Lambda = \lambda \pm i\omega \quad (\lambda > 0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komplexe Schreibweise $\quad \dot{z} = (\lambda \pm i\omega) z \quad , \quad z = x \mp iy \in \mathbb{C}$

<u>mit zeitverzögerte Rückkopplung</u>

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

"diagonale Rückkopplung"

$$\dot{z} = (\lambda \pm i\omega) z - K(z(t) - z(t-\tau))$$

Ansatz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim e^{\Lambda t}$

char. gl. $\quad 0 = \det \left[\begin{pmatrix} \lambda - \Lambda & \omega \\ -\omega & \lambda - \Lambda \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 1 - e^{-\Lambda\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\Lambda\tau} \end{pmatrix} \right]$

$$= [\Lambda + K(1 - e^{-\Lambda\tau}) - \lambda]^2 + \omega^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad [\qquad\qquad]^2 = -\omega^2$$

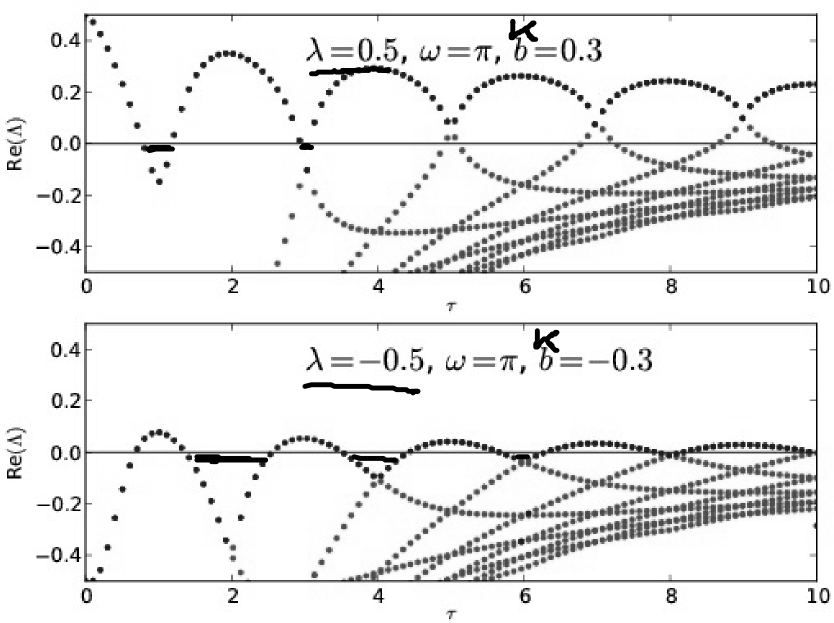
$$\Rightarrow \quad \boxed{\Lambda + K(1-e^{-\Lambda\tau}) = \lambda \pm i\omega}$$

Lösung durch Lambertfkt. $\underbrace{(\Lambda + K - (\lambda \pm i\omega))\tau}_{\tilde{z}} = K\tau e^{-\Lambda\tau}$

$$\tilde{z} e^{\tilde{z}} = K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau}$$

$$\Lambda\tau = W\left(K\tau e^{-(\lambda \pm i\omega)\tau + K\tau}\right) + (\lambda \pm i\omega)\tau - K\tau$$

natürliche Zeitskala: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ (Osz.periode ohne Delay)



unkontrolliert: Fixpkt. instab. ($\lambda > 0$)

unkontrolliert: Fixpkt. stabil ($\lambda < 0$)

nichtmonotones Verhalten der Eigenmoden
Re Λ als Fkt. von τ führt abwechselnd
zu Stabilisierung / Destabilisierung

Stabilitätswechsel bei $\tau \approx \frac{2n+1}{2} T_0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2$