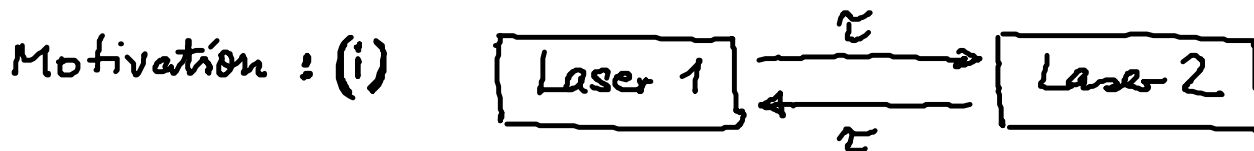


# 4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

## 4.1 Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen



Signallaufzeit  $\tau \neq 0$

Frage: wann sind beide Laser synchronisiert?

(ii) Neuronen



$\tau, \tau_1, \tau_2 \neq 0$  i.a.

(Signallaufzeit,  
neurovaskuläre Koppl.  
Ionen austausch  
durch Zellmembranen)

2 subkritische Hopf-Normalformen:  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

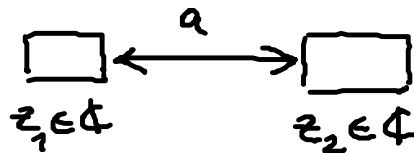
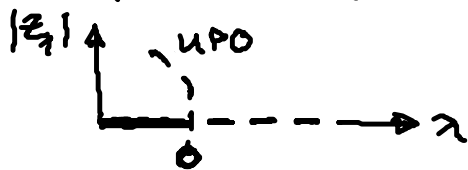
$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + iy)|z_1|^2)z_1 + a(z_2 - z_1)$$

$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + iy)|z_2|^2)z_2 + a(z_1 - z_2)$$

lit.: B. Fiedler, F. Flunkert, Hövel, Schöll, Phil. Trans. R. Soc. A 368, 319 (2010) diffusive Kopplung

oBdA:  $\omega = 1$

Hopf-Normalform (ohne Kopplung)



mit Kopplung: System beschrieben durch 4 dyn. Var.  $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re } z_1 \\ \text{Im } z_1 \\ \text{Re } z_2 \\ \text{Im } z_2 \end{pmatrix}$

Synchroner Zustand ( $z_1(t) = z_2(t) = z_{\text{sync}}(t)$ )

$\Rightarrow$  Kopplung verschwindet: 2 identische Systeme

$$z_{\text{sync}} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \dot{z}_{\text{sync}} = i e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1 + i\gamma)r^2) r e^{i\varphi}$$

$$\text{Re: } \dot{r} = (\lambda + r^2)r$$

$$\text{Im: } \dot{\varphi} = 1 + \gamma r^2$$

• instabiler period. Orbst (UPO):  $\dot{r} = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

$$r_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda}$$



Phase des UPO:  $\varphi = \omega t \equiv \frac{2\pi}{P_+}$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P_+} = 1 + \gamma r_{\text{sync}}^2 = 1 - \lambda\gamma$$

$$P_{\text{sync}} = P_+ = \frac{2\pi}{1 - \lambda\gamma}$$

• Lösung für synchron. Zustand

$$z_{\text{sync}} = \sqrt{-\lambda} \exp \left[ \frac{2\pi i}{P_{\text{sync}}} t \right]$$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System?

Verwende neue Koord.:  $z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  symm., synchron.

$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$  antisymm., asynchron.

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{f(z_1)}_{\text{Hopf-NF}} + f(z_2) + \underbrace{a(z_2 - z_1)}_{\text{w}} + \underbrace{a(z_1 - z_2)}_{\text{w}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} (f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-))$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_- - z_+ \\ z_2 &= z_- + z_+ \end{aligned}$$

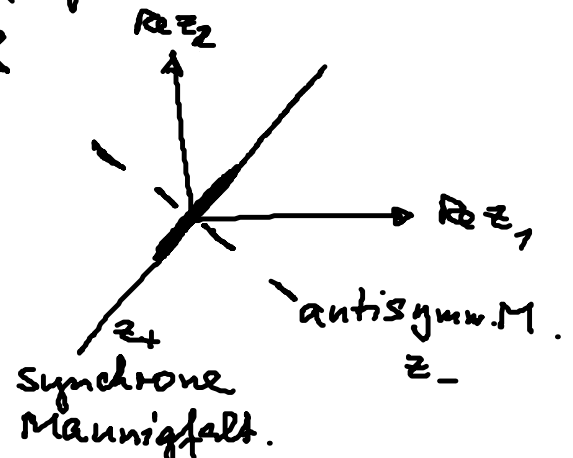
$$\dot{z}_- = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = \frac{1}{2} [f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)] - 2a z_-$$

• Menge gleichphasiger Lösungen (synchron. Lösungen)

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$

$$z_+ = z_{\text{sync}}$$

also  $\dot{z}_{\text{sync}} = f(z_{\text{sync}})$   
wie ungekoppeltes System



• Menge der gegenphasiger Lösungen: (auf der lebt  $z_{\text{sync}}$ )

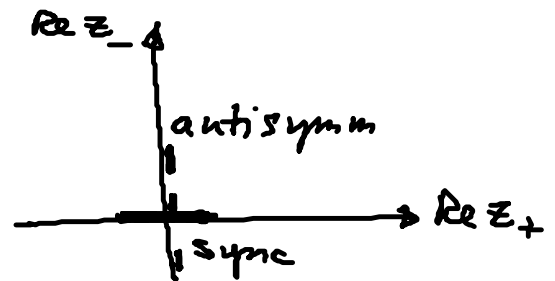
$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \}$$

$$\text{d. h. } z_1 = -z_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{z}_+ &= \frac{1}{2} (f(0 + z_-) + f(0 - z_-)) \\ &= \frac{1}{2} (f(z_-) - f(z_-)) = 0 \end{aligned}$$

da  $f$  kub. Fkt.  
(ungerade) von  $z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Lösung für } z_- : \dot{z}_- &= \frac{1}{2} (f(z_-) - f(-z_-)) - 2a z_- \\ &= f(z_-) - 2a z_- \end{aligned}$$



$$= (\lambda + i + (1 + i)\gamma) |z_-|^2 z_- - 2a z_-$$

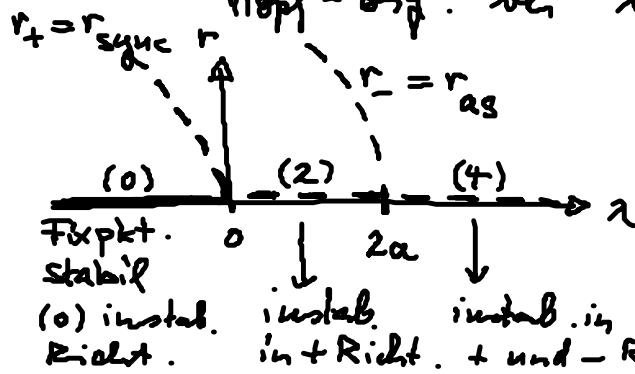
$$z_{as} = z_- = r_- \exp\left[\frac{2\pi}{P_-} t\right]$$

$$\text{mit } r_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)}$$

$$\text{Periode } P_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)\gamma}$$

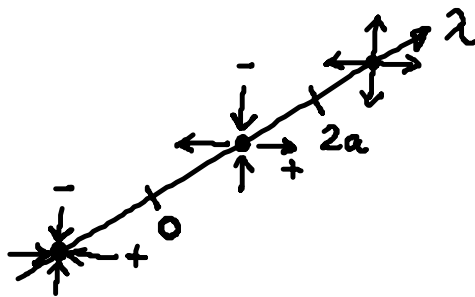
Fazit: gegenphasiger period. Orbit verschwindet in einer

Hopf-Bif. bei  $\lambda = 2a$



(4) instab. Richt. des Fixpunktes

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wunsch: Stabilisierung der periodischen Lösungen  $r_+$ ,  $r_-$

Möglich durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

(i)  $r_{sync}$  wurde in 3.2.2 durch Wahl  $\tau = p_+$  stabilisiert

(ii)  $r_{as}$  stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle mit halber Periode  $\tau = \frac{P_-}{2}$

(Stab. des Fixp. soll umgedreht werden: )

Begründung:  $z_-(t - \frac{P_-}{2}) = r_- \exp\left(\frac{2\pi i (t - \frac{P_-}{2})}{P_-}\right)$

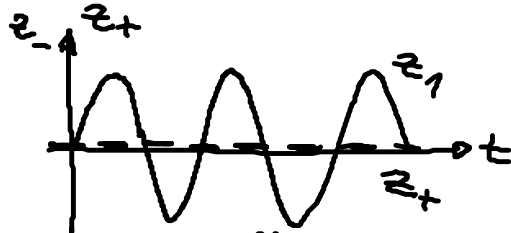
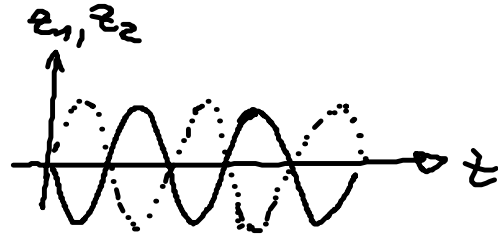
$$= \underbrace{r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right)}_{z_-(t)} \underbrace{\exp(-\pi i)}_{-1}$$

$$= -z_-(t)$$

$$\Rightarrow z_1(t) = z_+ + z_- = z_-(t) = -z_-(t - \frac{\tau^-}{2}) = z_2(t - \frac{\tau^-}{2})$$

analog:  $z_2(t) = z_1(t - \frac{\tau^-}{2})$

gegenphasige Osz.



Systemgl. mit nichtinvasiver Kontrolle:

$b \in \mathbb{R}$

$$(I) \dot{z}_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t - \tau) - z_1(t))$$

$$(II) \dot{z}_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t - \tau) - z_2(t))$$

$= 0$  für  $\tau = \frac{\tau^-}{2}$  auf  $Z_-$

NB: Diese Kontrolle ist invasiv auf dem gleichphasigen Orbit  $z_+$ !

Frage: Welche  $b$  stabilisieren  $z_-$ ?

in  $z_+$  und  $z_-$ -Koord. linter gl. (I), (II):

$$(I') \dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b(z_+(t - \tau) - z_+(t))$$

$$(II') \dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) - 2az_- - b(z_-(t - \tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von  $z_- = r_- e^{i\varphi}$ :

Untersuche Stabilität des Fixpunktes im Ursprung!

$\Rightarrow$  linearisiere (I'), (II') um  $z_1 = z_2 = 0$  ( $z_+ = z_- = 0$ )

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} [(\lambda + i)(z_+ + z_-) + (\lambda + i)(z_+ - z_-)] + b(z_+(t - \tau) - z_+(t))$$

$$= (\lambda + i)z_+ + b(z_+(t - \tau) - z_+(t))$$

$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b(z_-(t - \tau) - z_-(t))$$

NB: Linearisierung entkoppelt  $z_+$  und  $z_-$

Ausatz  $z_{\pm} \sim e^{\lambda t}$  ( $\lambda$  Eigenwert)

Untersuche Stabilität des Fixpts. Bei  $\lambda = 2a$  mit  $\tau = \frac{P_-}{2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{P_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2a)\tau)} = \pi$$

$\uparrow$   
 $\lambda = 2a$  (am Bif. pkt. von  $z_{as}$ )

char. Gln. (am Bif. pkt  $\lambda = 2a$ ):

$$z_+ : 0 = \lambda + i + b(e^{-\lambda\tau} - 1) - \lambda$$
$$= \underset{\downarrow}{2a} + i + b(e^{-2\pi} - 1) - \lambda \quad (*)_+$$

$$z_- : 0 = \cancel{2a} - \cancel{2a} + i - b(e^{-\pi} - 1) - \lambda \quad (*)_-$$